Prova di autovalutazione (Ing. Elettronica) 19/12/2014

1. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid 2x - 3y + z = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid x - y + 3w = 0,\ z - 3x = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

sol. $\dim(S) = 3, \quad \dim(T) = 2, \quad \dim(S \cap T) = 1.$
$\mathcal{B}_S = \{(1, 0, -2, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad \mathcal{B}_T = \{(1, 0, 3, -1/3), (0, 1, 0, 1/3)\}$
$\mathcal{B}_{S\cap T} = \{(3, 5, 9, 2/3)\}$.

2. Scrivere la matrice A_f associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, -2)) = (2, 3)$ e $f((1, 0)) = (-2, 4)$.

sol.

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Fra le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, quali sono iniettive?

$f(x, y, z) = (x, y, x + y, z)$ ☒ $\qquad f(x, y, z) = (x - y, z, 2x - 2y, 0)$ ☐

$f(x, y, z) = (x, x, y, y)$ ☐ $\qquad f(x, y, z) = (x, y, z, x + y + z)$ ☒

4. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = -1$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile ☒ $\qquad$ l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è suriettiva ☒

$\mathrm{rg}A = n$ ☒ $\qquad$ il sistema $AX = B$ è incompatibile ☐

$\det(-A) = 1$ ☐ $\qquad$ le colonne di A sono dipendenti ☐

5. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (2x + y + kz, 2x + 3y + kz, 5x - 2y + z)$.

sol. Per $k \neq 2/5$, l'applicazione è biiettiva. Si ha $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0, \dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$; $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, f} = \emptyset, \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Per $k = 2/5$ si ha $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1, \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$; $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, f} = \{(1, 0, -5)\}, \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = \{(2, 2, 5), (1, 1, -2)\}$.

7. Se i tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, i tre vettori $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w} - \mathbf{u}$ di V sono ancora indipendenti? Motivare la risposta.

sol. No, i tre vettori $\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{w}, \mathbf{w}-\mathbf{u}$ sono dipendenti. Infatti

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})+(\mathbf{v}-\mathbf{w})+(\mathbf{w}-\mathbf{u})=0_V$$

è una loro combinazione lineare nulla a coefficicenti non tutti nulli.

7. Mostrare che, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$, allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

sol. Supponiamo si abbia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3$. Allora $0_{R^3} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 - (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3) = (a_1-b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2-b_2)\mathbf{v}_2 + (a_3-b_3)\mathbf{v}_3$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$; dal momento che i vettori sono indipendenti, i coefficienti devono essere tutti nulli, e quindi si ha $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

8. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. Siano A, B due matrici quadrate dello stesso ordine.
a. Se A è una matrice tale che $A^2 = I$, allora $\det(A) = \pm 1$. **V**
b. Se $\det(AB) = 0$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$. **V**
c. $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.**F**
d. $\det(-A) = -\det(A)$.**F**
e. Se la diagonale principale di A consiste di soli zeri, allora $\det(A) = 0$.**F**
f. Se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.**V**
g. $\det(AB) = \det(BA)$.**V**