

II prova intermedia di Geometria (Ing. Elettronica) 30/1/2015 ;

Cognome e nome:

Numero di matricola:

1. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid x + 3y + z = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid x - z + 3w = 0, y + 3x = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

sol. $\dim(S) = 3$, $\dim(T) = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$.

$\mathcal{B}_S = \{(-3, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ $\mathcal{B}_T = \{(1, -3, 1, 0), (-3, 9, 0, 1)\}$
 $\mathcal{B}_{S \cap T} = \{(1, -3, 8, 7/3)\}$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ sono dipendenti i vettori $\mathbf{v}_1 = (3, 3, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (k, 0, k, 2k)$ di $\mathbb{R}^4$? **sol.** Per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3. Scrivere la matrice A_f associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f((2, -1)) = (1, 3)$ e $f((1, 0)) = (2, 1)$.

sol.

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Fra le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, quali sono suriettive?

$f(x, y, z, w) = (x + z, z + w, w)$ ☒ $f(x, y, z, w) = (x - w, 2x - 2w, w)$ ☐

$f(x, y, z, w) = (y, y + w, w)$ ☐ $f(x, y, z, w) = (z + x, y, w)$ ☒

5. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 0$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

$\operatorname{rg} A \leq n - 1$ ☒ l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$ è biiettiva ☐

A non è diagonalizzabile ☐ A ammette 0 come autovalore ☒

$\operatorname{Null}(A) = \mathbb{R}^n$ ☐ le righe di A sono dipendenti ☒

6. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (3x + y - 2z, 2x - y + kz, -x + 3y + 2kz)$.

sol. Per $k \neq -1/2$, l'applicazione è biiettiva. Si ha $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$; $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \emptyset$, $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Per $k = -1/2$ si ha $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$; $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \{(1, 1, 2)\}$, $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{(3, 2, -1), (1, -1, 3)\}$.

7. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

sol. Gli autovalori sono $-1, -1, 0$; gli autospazi sono $V_{-1} = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 0) \rangle$, $V_0 = \langle (2, 1, 3) \rangle$. La matrice è diagonalizzabile.

8. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono vettori linearmente dipendenti di V , e se $f : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare, i vettori $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})$ sono ancora dipendenti in W ? Motivare la risposta.

sol. Sì, i vettori $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})$ sono dipendenti in W . Infatti, siccome i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono vettori linearmente dipendenti in V , esistono numeri reali a, b non entrambi nulli tali che $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dunque si ha $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$, quindi $\mathbf{0} = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli dei vettori $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})$, che sono quindi dipendenti.