Prova intermedia di Geometria (Ing. Elettronica) 21/11/2014 **PROVA**

Cognome e nome:
Numero di matricola:

1. Determinare la matrice A tale che

$$\left[\frac{1}{2}A - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Risultato:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Stabilire se la matrice A è invertibile e, in caso affermativo, determinare l'inversa di A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Risultato: A è invertibile, e $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sia A una matrice 5×5, e sia $\mathrm{rg}(A) = 5$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A non è invertibile ☐
le colonne di A sono vettori linearmente indipendenti ☒
$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^5}\}$ ☒
Il sistema $AX = B$ ha infinite soluzioni ☐

4. Determinare le soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Risultato: Le soluzioni sono i vettori della forma

$$(-2, -5, 1, 0)s + (-1, 0, 0, 1)t$$

al variare di $s, t \in \mathbb{R}$.

5. Determinare in quali dei seguenti casi si ha $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, con $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

$V = \mathbb{R}^3$; $\mathbf{v} = (-1, 3, -1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 1)$ ☒
$V = \mathbb{R}^4$; $\mathbf{v} = (-1, 3, 2, -1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, -2, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 1, 1)$ ☐
$V = M_{2\times 2}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐
$V = \mathbb{R}_3[x]$; $\mathbf{v} = 3 + x + 4x^2$, $\mathbf{u} = 1 + x + x^2$, $\mathbf{w} = x - x^2$ ☐

6. Per quali valori di k, se esistono, il seguente sistema ha infinite soluzioni?

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 2k \\ -2y + 3z = 3 \\ -2kx - 3ky + 2z = k \end{cases}.$$

Risultato: Per $k = 1$.