Geometria (Ingegneria Elettronica) 20/6/2013.

Cognome e nome:

Numero di matricola:

1. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubiltà del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 2k \\ -2y + 3z = 3 \\ -2kx - 3ky + 2z = k \end{cases}.$$

2. Risolvere il sistema dell'esercizio precedente per $k = 1$.

3. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid -x + 2y - 2z = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid x + y + 3w = 0,\ 3z - 2y = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ sono indipendenti i vettori $\mathbf{v_1} = (1, 2, -2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (1, 2, 0, k), \mathbf{v_3} = (0, k, k + 2, -3)$?

5. Scrivere la matrice A_f associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((2, -2)) = (1, 0)$ e $f((0, 1)) = (2, 3)$.

6. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 2$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile	☐	Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni	☐
$\mathrm{Null}(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$	☐	l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è suriettiva	☐
A ammette 2 come autovalore	☐	le colonne di A sono dipendenti	☐

7. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x + 2y + z, y - kz, x - 3y + kz)$.

8. Per quali valori di k è invertibile la matrice A associata all'applicazione lineare dell'esercizio precedente? Fissato un valore di k (specificare quale), determinare A^{-1}.

9. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

10. Mostrare che, se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, allora anche i due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}$ sono indipendenti.