Esercizi di Geometria
Spazi vettoriali e sottospazi

1. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

- (a) $\{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x + y = z\}$
- (e) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 = z^2\}$

Risultato:

- (a) No.
 - (b) Sì.
 - (c) Sì.
 - (d) Sì.
 - (e) No: per esempio, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ soddisfano la condizione, ma la loro somma $(1, 1, 2)$ no.
2. Mostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Soluzione: Scriviamo il sistema in forma matriciale come $AX = 0$, dove $A \in M_{m \times n}$ e $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ è la colonna delle incognite, e consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come matrici colonna $n \times 1$. Sia

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

l'insieme delle soluzioni del sistema. Si ha $S \neq \emptyset$ visto che $(0, 0, \dots, 0)^T$ è soluzione del sistema; inoltre se $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ e $X' = (x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n)^T$ sono due soluzioni del sistema, quindi tali che $AX = 0$ e $AX' = 0$, si ha che $aX + bX'$ è ancora una soluzione del sistema per ogni $a, b \in \mathbb{R}$; infatti $A(aX + bX') = A(aX) + A(bX') = aAX + bAX' = 0 + 0 = 0$; scelti $X, X' \in S$ abbiamo visto che $aX + bX' \in S$, e S è dunque un sottospazio.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- (b) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$
- (c) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$
- (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a + c = b + d \right\}$

Risultato:

(a) Sì.

(b) Sì.

(c) No: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soddisfa la condizione, ma la matrice

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ no.}$$

(d) Sì.

4. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$? Motivare la risposta.

(a) $\{p(x) \mid p(2) = 0\}$

(b) $\{p(x) \mid p(2) = 1\}$

(c) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}_3[x]$ con termine noto pari a zero:
 $\{a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Risultato:

(a) Sì.

(b) No.

(c) Sì.

5. Sia U un sottospazio di V . Mostare che

(a) se $a\mathbf{v} \in U$ con $a \neq 0$, allora $\mathbf{v} \in U$;

(b) se $\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$, allora $\mathbf{u} \in U$.

Soluzione:

1. se $a\mathbf{v} \in U$ con $a \neq 0$, allora anche il prodotto $\frac{1}{a} \cdot (a\mathbf{v}) \in U$; quindi $\mathbf{v} \in U$.

2. se $\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$, allora anche $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - \mathbf{v} \in U$; quindi $\mathbf{u} \in U$.