**Prova di autovalutazione**
Geometria per Ingegneria Elettronica
27 ottobre 2011

1. Verificare che l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+3}{5}$ è biiettiva. Calcolare $f^{-1}$.

2. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$
calcolare $A^2 \cdot B$.

3. Calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esecizio 3 è invertibile? Calcolare la matrice inversa.

5. Calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esecizio 5 è invertibile? Fissato uno di questi valori, calcolare la matrice inversa.

7. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ Una matrice con la proprietà che la terza riga di $A$ è pari alla somma delle prime due righe. Quanto vale il determinante di $A$? Motivare la risposta.

8. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ è tale che $A^3 = 3I$, $A$ è invertibile? Motivare la risposta.

9. Calcolare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

10. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} k-1 & 0 & -4k & 4 \\ 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Usando la riduzione a forma triangolare, calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

13. ($\star$) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

14. ($\star$) Mostrare che rg($A$)=rg($A^T$).

15. ($\star$) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile, dimostrare che $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$.