Prova di autovalutazione
Geometria per Ingegneria Elettronica
novembre 2011

1. Mostrare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile? Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni?
$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + 4y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases} .$$

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema
$$\begin{cases} x + 3ky + 3z = 0 \\ 2kx + 2z = -2 \\ x - 3y + 2z = k \end{cases} .$$

4. Fissato e specificato un valore di k per cui il sistema del'esercizio 3 è compatibile, risolvere il sistema.

5. Trovare sotto che ipotesi su a, b, c si ha che il seguente sistema è compatibile.
$$\begin{cases} x + 3y + z = a \\ -x - 2y + z = b \\ 3x + 7y - z = c \end{cases} .$$

6. Un sistema lineare di cinque equazioni in sette incognite può non avere soluzioni? Può avere una sola soluzione?

7. (a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V tali che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti. Mostrare che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ formano un insieme dipendente.
   (b) Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V, con $\mathbf{O}_V \in A$. Mostrare che l'insieme A è dipendente.
   (c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Mostrare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ sono dipendenti.

8. Per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, k, -2), \mathbf{v}_2 = (1, k, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (k, 1, 1, 1)$ sono indipendenti?

9. Determinare una base e la dimensione per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$
$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2w = 0, \text{ e } y - 3z = 0\}.$$

10. Determinare una base e la dimensione per il sottospazio $T = \{(x, y, z, w) \mid x+3y-z = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Se S è il sottospazio dell'esercizio 9, determinare una base e la dimensione di $S \cap T$ e $S + T$.

11. In $\mathbb{R}^4$ siano S e T sottospazi tali che $\dim(S) = \dim(T) = 3$. È possibile che si abbia $\dim(S \cap T) = 1$? Motivare la risposta.