Prova di autovalutazione
Geometria per Ingegneria Elettronica
novembre 2011

1. Mostrare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

   Soluzione: Scriviamo il sistema in forma matriciale come $AX = 0$, dove $A \in M_{m\times n}$ e $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$ è la colonna delle incognite, e consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come matrici colonna $n \times 1$. Sia $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema. Si ha $S \neq \emptyset$ visto che $(0, 0, \dots, 0)^T$ è soluzione del sistema; inoltre se $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$ e $X' = (x'_1\ x'_2\ \dots\ x'_n)^T$ sono due soluzioni del sistema, quindi tali che $AX = 0$ e $AX' = 0$, si ha che $aX + bX'$ è ancora una soluzione del sistema per ogni $a, b \in \mathbb{R}$; infatti $A(aX + bX') = A(aX) + A(bX') = aAX + bAX' = 0 + 0 = 0$; scelti $X, X' \in S$ abbiamo visto che $aX + bX' \in S$, e S è dunque un sottospazio.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile? Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette infinite soluzioni?
$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + 4y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}.$$
   Risultato: Si ha $\mathrm{rg}(A) = 2\ \forall\ k$, $\mathrm{rg}(A') = 2$ solo per $k = 3, -4$; quindi il sistema è compatibile se e solo se $k = 3, -4$. In entrambi i casi la soluzione è unica.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema
$$\begin{cases} x + 3ky + 3z = 0 \\ 2kx + 2z = -2 \\ x - 3y + 2z = k \end{cases}.$$
   Risultato: $\mathrm{rg}(A) = 2$ per $k = (-1 \pm \sqrt{3})/2$, $\mathrm{rg}(A) = 3$ altrimenti; $\mathrm{rg}(A') = 3\ \forall\ k$. Il sistema è quindi compatibile, e ammette una soluzione unica, per $k \neq (-1 \pm \sqrt{3})/2$.

4. Fissato e specificato un valore di k per cui il sistema dell'esercizio 3 è compatibile, risolvere il sistema.

   Risultato: Scegliendo $k = 0$, si ha la soluzione $(x, y, z) = (3, \frac{1}{3}, -1)$.

5. Trovare sotto che ipotesi su a, b, c si ha che il seguente sistema è compatibile.
$$\begin{cases} x + 3y + z = a \\ -x - 2y + z = b \\ 3x + 7y - z = c \end{cases}.$$
   Risultato: a, b, c devono soddisfare l'equazione $c + 2b - a = 0$.

6. Un sistema lineare di cinque equazioni in sette incognite può non avere soluzioni? Può avere una sola soluzione?

   Soluzione: Il sistema può non avere soluzioni, se si ha $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A')$; per esempio il sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \end{cases}$$
   è incompatibile. Se il sistema è compatibile, le soluzioni sono sicuramente infinite; il numero delle incognite (che è 7) è sicuramente maggiore del rango della matrice dei coefficienti (che è ≤ 5).

7. (a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V tali che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti. Mostrare che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ formano un insieme dipendente.

   (b) Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V, con $\mathbf{O}_V \in A$. Mostrare che l'insieme A è dipendente.

   (c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Mostrare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ sono dipendenti.

   Soluzione: (a) Siccome $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono dipendenti, esistono $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ tali che $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$; ma allora $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli, quindi i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

   (b) Sia $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots\}$, e sia $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Si ha che $a\mathbf{0} + 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \ldots = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli (perché il primo coefficiente, a, è non nullo). Quindi A è un insieme dipendente.

   (c) Si ha che $1\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli. I vettori sono quindi dipendenti.

8. Per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, k, -2), \mathbf{v}_2 = (1, k, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (k, 1, 1, 1)$ sono indipendenti?

   Risultato: Per $k \neq 1, -2$.

9. Determinare una base e la dimensione per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2w = 0, \text{ e } y - 3z = 0\}.$$

   Risultato: Una base è $\mathcal{B}_S = \{(2/3, 0, 0, 1), (0, 3, 1, 0)\}$; la dimensione è due.

10. Determinare una base e la dimensione per il sottospazio $T = \{(x, y, z, w) \mid x + 3y - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Se S è il sottospazio dell'esercizio 9, determinare una base e la dimensione di $S \cap T$ e $S + T$.

    Risultato: $\mathcal{B}_T = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim T$=3; $\mathcal{B}_{S \cap T} = \{(-8, 3, 1, -12)\}$, $\dim(S \cap T) = 1$; per la formula di Grassmann si ha quindi che $\dim(S + T) = 4$, quindi $S + T = \mathbb{R}^4$ e una base per $S + T$ è per esempio $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

11. In $\mathbb{R}^4$ siano S e T sottospazi tali che $\dim(S) = \dim(T) = 3$. È possibile che si abbia $\dim(S \cap T) = 1$? Motivare la risposta.

    Soluzione: La formula di Grassmann dà

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S + T),$$

    quindi in questo caso si ha $6 = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$; ma $\dim(S + T) \leq 4$, visto che $S + T$ è sottospazio di $\mathbb{R}^4$, quindi $\dim(S \cap T) \geq 2$. Non è quindi possibile che sia $\dim(S \cap T) = 1$.