Prova di autovalutazione

Geometria per Ingegneria Elettronica

dicembre 2011

1. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x + 3y - 6z, x + ky + 2z, x - ky)$.

2. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, 1)) = (4, 2)$ e $f((1, 0)) = (-2, -1)$. Determinare una base per il nucleo di questa applicazione.

3. Mostrare che un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può essere iniettiva, e che un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ non può essere suriettiva.

4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare; mostrare che se i vettori $f(v_1), f(v_2), \dots f(v_k)$ sono linearmente indipendenti in W, allora i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V.

5. ($\star$) In $\mathbb{R}^2$ si consideri il sottospazio $S = \{(x, x)\ x \in \mathbb{R}\}$. Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker f = S$.

6. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile? Se sì, trovare 3 autovettori indipendenti per A.

7. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile? Se sì, trovare 3 autovettori indipendenti per A.

8. Per quali $k \in \mathbb{R}$ il vetttore $\mathbf{v} = (1, 4, 2)$ è un autovettore per la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

9. Trovare una matrice 3×3 che abbia come autovettori i vettori $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -3), \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ associati rispettivamete agli autovalori $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2$.

10. Se A è una matrice tale che $\det(A) = 2$, allora 0 può essere un autovalore per A? Motivare la risposta.