Prova di autovalutazione

Geometria per Ingegneria Elettronica

soluzioni

1. Verificare che l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+3}{5}$ è biiettiva. Calcolare f^{-1}.

   Soluzione: $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x^3+3}{5} = \frac{y^3+3}{5} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$, quindi la f è iniettiva. Per ogni $y \in \mathbb{R}$, se scegliamo $x = \sqrt[3]{5y-3}$ si ha $f(x) = y$, quindi f è anche suriettiva. La f^{-1} è l'applicazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(z) = \sqrt[3]{5z-3}$.

2. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$
   calcolare $A^2 \cdot B$.

   Risultato: $A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 28 & -7 & 42 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$
   Risultato: $\det(A) = 4 - k^2$.

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esecizio 3 è invertibile? Calcolare la matrice inversa.

   Risultato: A invertibile $\iff k \neq 2, -2$; $A^{-1} = \frac{1}{4-k^2} \begin{pmatrix} 4 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Risultato: $\det(A) = k^2 + k - 12$.

6. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esecizio 5 è invertibile? Fissato uno di questi valori, calcolare la matrice inversa.

   Risultato: A invertibile $\iff k \neq 3, -4$; scelto $k = 0$, si ha $A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ Una matrice con la proprietà che la terza riga di A è pari alla somma delle prime due righe. Quanto vale il determinante di A? Motivare la risposta.

Soluzione: Il determinante è zero. Infatti, possiamo scrivere A come $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix}$. Se B è la matrice ottenuta da A operando sulle righe come segue: $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, si ha $\det(B) = \det(A)$ e $B = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{pmatrix}$. Ora B ha detrminante zero, perché ha due righe uguali; quindi anche il determinante di A è zero.

8. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ è tale che $A^3 = 3I$, A è invertibile? Motivare la risposta.

   Soluzione: Si ha $\det(A^3) = \det(3I) = 27$; per il teorema di Binet, $\det(A^3) = \det(A \cdot A \cdot A) = (\det(A))^3$, quindi $\det(A) = 3 \neq 0$ e A è invertibile.

9. Calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

   Risultato: Il rango della matrice è 2.

10. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} k-1 & 0 & -4k & 4 \\ 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Risultato: Il rango della matrice è 3 per $k \neq -3$, il rango è 2 per $k = -3$.

11. Usando la riduzione a forma triangolare, calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Risultato: $\det(A) = 14$; una forma triangolare per A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$.

12. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

   Risultato: L'inversa è la matrice $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

13. ($\star$) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

Soluzione: Si ha $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ quindi $A + A^T$ è simmetrica. Si ha $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ quindi $A - A^T$ è antisimmetrica. Ora la scrittura richiesta è $A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$.

14. ($\star$) Mostrare che rg(A)=rg(A^T).

    Soluzione: Basta ricordare che $\det(B) = \det(B^T)$ per ogni matrice quadrata B, e che ogni sottomatrice quadrata di A^T è la trasposta di una sottomatrice quadrata di A.

15. ($\star$) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile, dimostrare che $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$.

    Soluzione: $A \cdot \frac{1}{\det(A)} A^* = I \Rightarrow A \cdot A^* = \det(A) I$. Quindi $\det(A)\det(A^*) = \det(A \cdot A^*) = \det(\det(A) I_n) = \det(A)^n$, e dunque $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$.