Esercizi di Geometria
Determinanti

1. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

   (b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

   (c)
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & 4 & -9 \end{pmatrix};$$

   (d)
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Calcolare il determinante di

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ k & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

   (b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

   Per queli valori di $k \in \mathbb{R}$ il determinante di queste matrici è nullo?

3. Per queli valori di k, h si annulla il determinante della matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & k & h \\ h & 0 & k \\ k & h & 0 \end{pmatrix}?$$

4. Provare che si ha
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = (y-z)(z-x)(z-y).$$

5. Verificare che valga $\det(A)\det(B) = \det(AB)$ per due matrici 2×2.

6. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Siano A, B due matrici quadrate dello stesso ordine.

   (a) Se A è una matrice tale che $A^2 = I$, allora $\det(A) = \pm 1$.

   (b) Se $A^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora $\det(A) = 1$.

   (c) Se $\det(A) = 1$, allora $A = I$.

   (d) Se $\det(AB) = 0$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$.

   (e) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   (f) $\det(-A) = -\det(A)$.

   (g) Se la diagonale principale di A consiste di soli zeri, allora $\det(A) = 0$.

   (h) $\det(AB) = \det(BA)$