Esercizi di Geometria

Dipendenza e indipendenza lineare, base e dimensione.

1. Qual dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti?
   (a) $\{(1,1,1),(1,-1,1),(0,0,1)\}$
   (b) $\{(-1,-1,-1),(1,-1,1),(1,0,1)\}$
   (c) $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$

2. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$
   $$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (2,1,0), \quad v_3 = (0,1,k);$$
   sono linearmente dipendenti?

3. Se $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} \subset V$ è un insieme di vettori lineamente indipendenti, mostrare che $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori lineamente indipendenti.

4. Sia $0 \neq \mathbf{v} \in V$. Mostrare che l'insieme $\{\mathbf{v}\}$ è indipemdente.

5. Mostare che i vettori $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formano una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$.

6. Trovare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
   (a) $\{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{(x,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$
   (c) $\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R} \text{ e } 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}+\mathrm{z}=0\}$

7. Trovare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
   (a) $\{(x,y,z,w) \mid 2x-3y+z=0\}$
   (b) $\{(x,y,z) \mid x+z-3w=0 \text{ e } -3\mathrm{y}+\mathrm{z}=0\}$

8. Trovare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$.
   (a) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$
   (c) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ e } \mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{d}\}$