Esercizi di Geometria
Insiemi e applicazioni

1. Descrivere $A \cap B$ nei seguenti casi:
   (a) A è l'insieme dei numeri naturali pari, B quello dei numeri naturali divisibili per 5;
   (b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, B è l'insieme dei numeri primi;

2. Se $A \cup B = A$, a cosa è uguale $A \cap B$? E se $A \cup B = A \cap B$, allora ...

3. Se A è un insieme, l'*insieme delle parti di* A, denotato con $\mathcal{P}(A)$, è l'insieme dei sottoinsiemi di A. Descrivere esplicitamente $\mathcal{P}(\{a, b\})$ e $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$. Quanti elementi hanno? Se A è un insieme con n elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(A)$?

4. Siano $A = \{a, b\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Descrivere esplicitamente $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$.

5. Verificare quali delle seguenti applicazioni f (in cui A è il dominio e B il codominio, e x è un elemento di A) sono iniettive, quali suriettive, quali biiettive.
   (a) $A = \{\text{mesi dell'anno}\}$, $B = \{\text{lettere dell'alfabeto italiano}\}$, $f(x) =$ lettera con cui inizia il nome di x;
   (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$;
   (c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$;
   (d) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
   (e) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$.

6. (a) Verificare se l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) = \frac{4x+3}{5}$ è biiettiva.
   (b) Verificare se l'applicazione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{Q}$, si ha $f(x) = \frac{2x-3}{7}$ è biiettiva.
   (c) Verificare se l'applicazione $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, si ha $f((x, y)) = (-\frac{y}{2}, 2x + y)$ è biiettiva.
   (d) Determinare, se è possibile, l'inversa dell'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) = \frac{x^3-2}{3}$.
   (e) Determinare, se è possibile, l'inversa dell'applicazione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{Q}$, si ha $f(x) = \frac{4x+5}{7}$.

7. Sia X un insieme con $|X| = 3$. Quante biiezioni $f : X \to X$ ci sono? Per quante di queste vale che $f = f^{-1}$?

8. Calcolare il prodotto operatorio $f \circ g$ e $g \circ f$ dove
   (a) $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
   $f(x) = x^2 + 4, \quad g(x) = \frac{7x-2}{5}$.
   (b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = \frac{x^3-2}{2}$.

9. ($\star$) Dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva".