Geometria (Ingegneria Elettronica)

Cognome e nome:
Numero di matricola:

1. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubiltà del sistema

$$\begin{cases} 2x + ky = k \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ -kx - ky - 2kz = 1 \end{cases} .$$

2. Risolvere il sistema dell'esercizio precedente per $k = 1$.

3. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid x - y + 3w = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid 2x + y + 3z = 0,\ z + 3y = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ sono dipendenti i vettori $\mathbf{v}_1 = (k, 0, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, k)$, $\mathbf{v}_3 = (2, k, 1, 3)$ di $\mathbb{R}^4$?

5. Mostare che, se A è una matrice $n \times n$ tale che $A^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora A non è invertibile.

6. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 0$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile $\square$ Il sistema $AX = 0$ possiede autosoluzioni $\square$

$\mathrm{rg} A = n - 1$ $\square$ l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, non è iniettiva $\square$

A ammette 0 come autovalore $\square$ A ha rango pari a n $\square$

7. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (3x + 5y + 10z, kx + 4y + 2z, kx - 3y - 3z)$.

8. Per quali valori di k è invertibile la matrice A associata all'applicazione lineare dell'esercizio precedente? Fissato un valore di k (specificare quale), determinare l'elemento a_{23} di A^{-1}.

9. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

10. Sia U un sottospazio di uno spazio vettoriale V, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Mostrare che $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$ è un sottospazio di W.