Geometria (Ingegneria Elettronica)

Cognome e nome:
Numero di matricola:

1. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubiltà del sistema

$$\begin{cases} 2x + ky = k \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ -kx - ky - 2kz = 1 \end{cases}.$$

Per $k \neq 0, 1$ *il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione.*
Per $k = 1$ *il sistema ammette infinite soluzioni.*
Per $k = 0$ *il sistema è incompatibile.*

2. Risolvere il sistema dell'esercizio precedente per $k = 1$.

$(x, 1 - 2x, \frac{x-2}{2}), \quad x \in \mathbb{R}$

3. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid x - y + 3w = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid 2x + y + 3z = 0,\ z + 3y = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$. Quindi $\dim S = 3$, $\dim T = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$

$\mathcal{B}_S = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1)\}$; $\mathcal{B}_T = \{(4, 1, -3, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; $\mathcal{B}_{S \cap T} = \{(4, 1, -3, -1)\}$.

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ sono dipendenti i vettori $\mathbf{v}_1 = (k, 0, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, k)$, $\mathbf{v}_3 = (2, k, 1, 3)$ di $\mathbb{R}^4$?

$k = 1$.

5. Mostare che, se A è una matrice $n \times n$ tale che $A^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora A non è invertibile.

$A^k = 0$, *quindi* $\det(A^k) = 0$. *Dal teorema di Binet si ha che* $\det(A^k)$=$(\det A)^k$*; quindi in questo caso si ha* $(\det A)^k = 0$*, da cui* $\det(A) = 0$*, e* A *non è invertibile.*

6. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 0$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile	☐	Il sistema $AX = 0$ possiede autosoluzioni	☒
$\mathrm{rg} A = n - 1$	☐	l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, non è iniettiva	☒
A ammette 0 come autovalore	☒	A ha rango pari a n	☐

7. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (3x + 5y + 10z, kx + 4y + 2z, kx - 3y - 3z)$.

Per $k \neq -2/5$ *si ha* $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$; *quindi non esiste una base per il nucleo, e, per esempio,* $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Per $k = -2/5$ *si ha* $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$; $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, f} = \{((15, 5, -7))\}$ *e* $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = \{(5, 4, -3), (10, 2, -3)\}$

8. Per quali valori di k è invertibile la matrice A associata all'applicazione lineare dell'esercizio precedente? Fissato un valore di k (specificare quale), determinare l'elemento a_{23} di A^{-1}.

Per $k \neq -2/5$; *fissato* $k = 0$, *l'elemento* a_{23} *di* A^{-1} *è* $1/3$

9. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

Gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$; *gli autospazi sono* $V_3 = \{(x, -2z, z),\ x, z \in \mathbb{R}\}$ *e* $V_{-2} = \{(5y, y, -3y),\ y \in \mathbb{R}\}$. *La matrice è diagonalizzabile*

10. Sia U un sottospazio di uno spazio vettoriale V, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Mostrare che $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$ è un sottospazio di W.

Si ha $0_W \in f(U)$, *perché* $0_V \in U$ *e quindi* $f(0_V) = 0_W \in f(U)$; *dunque* $f(U) \neq \emptyset$. *Siano ora* v, w *vettori di* $f(U)$; *allora* $v = f(v')$ *e* $w = f(w')$ *per qualche* $v', w' \in U$. *Ora, presi* $a, b \in \mathbb{R}$, *si ha* $av + bw = af(v') + bf(w') = f(av' + bw')$ *perché* f *è lineare; inoltre* $av' + bw'$ *è un elemento di* U, *perché* U *è un sottospazio. Quindi presi* $v, w \in f(U)$ *si ha* $av + bw \in f(U)$; $f(U)$ *è quindi un sottospazio.*