

Prova di autovalutazione
Geometria per Ingegneria Elettronica
6 novembre 2012

1. Verificare che l'applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^5-7}{5}$ è biiettiva. Calcolare f^{-1} .
2. Determinare il risultato della seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Descrivere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + w = 5 \\ 2x + 2y - z - 2w = 0 \\ x + 6y - 3z - 5w = -5 \end{cases}$$

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile?

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 2y = -5 \\ 3x + 4y = k \end{cases}$$

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \\ -k & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esercizio 6 è invertibile? Calcolare la matrice inversa.
8. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ Una matrice con la proprietà che la terza riga di A è pari alla somma delle prime due righe. Quanto vale il determinante di A ? Motivare la risposta.
10. Sia A un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e sia $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione che associa ad ogni $a \in A$ il numero $f(a)$ dei suoi divisori interi. Stabilire in quali dei seguenti casi l'applicazione f risulta iniettiva:

$$A = \{4, 5, 6, 9\} \quad \square \quad A = \{5, 6, 8, 9\} \quad \square \quad A = \{5, 6, 9, 16\} \quad \square \quad A = \{5, 9, 12, 15\} \quad \square$$

11. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$.
12. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.