

Prova di autovalutazione
Geometria per Ingegneria Elettronica
6 novembre 2012 soluzioni

1. Verificare che l'applicazione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^5-7}{5}$ è biiettiva. Calcolare f^{-1} .

Soluzione: $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x^5-7}{5} = \frac{y^5-7}{5} \Rightarrow x^5 = y^5 \Rightarrow x = y$, quindi la f è iniettiva. Per ogni $y \in \mathbb{R}$, se scegliamo $x = \sqrt[5]{5y+7}$ si ha $f(x) = y$, quindi f è anche suriettiva. La f^{-1} è l'applicazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(z) = \sqrt[5]{5z+7}$.

2. Determinare il risultato della seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risultato:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 12 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & 84 & 42 \\ 56 & 44 & 38 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -27 & -77 & -30 \\ -47 & -36 & -29 \end{pmatrix}$$

3. Descrivere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + w = 5 \\ 2x + 2y - z - 2w = 0 \\ x + 6y - 3z - 5w = -5 \end{cases}$$

Risultato: Le soluzioni sono le quaterne della forma $(\frac{5+t}{5}, \frac{-10+5s+8t}{10}, s, t)$ al variare dei due parametri s e t .

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile?

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 2y = -5 \\ 3x + 4y = k \end{cases}$$

Risultato: Per $k = -1$.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \\ -k & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risultato: Per $k \neq 1$ il rango è 3; per $k = 1$ il rango è 2.

6. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}.$$

Risultato: $\det(A) = 4 - k^2$.

7. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esercizio ?? è invertibile? Calcolare la matrice inversa.

Risultato: A invertibile $\iff k \neq 2, -2$; $A^{-1} = \frac{1}{4-k^2} \begin{pmatrix} 4 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$.

8. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Risultato: $\det(A) = k^2 + k - 12$.

9. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ Una matrice con la proprietà che la terza riga di A è pari alla somma delle prime due righe. Quanto vale il determinante di A ? Motivare la risposta.

Soluzione: Il determinante è zero. Infatti, possiamo scrivere A come $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix}$. Se

B è la matrice ottenuta da A operando sulle righe come segue: $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, si ha $\det(B) = \det(A)$

e $B = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{pmatrix}$. Ora B ha determinante zero, perché ha due righe uguali; quindi anche il determinante di A è zero.

10. Sia A un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e sia $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione che associa ad ogni $a \in A$ il numero $f(a)$ dei suoi divisori interi. Stabilire in quali dei seguenti casi l'applicazione f risulta iniettiva:

$$A = \{4, 5, 6, 9\} \quad \square \quad A = \{5, 6, 8, 9\} \quad \square \quad A = \{5, 6, 9, 16\} \quad \boxtimes \quad A = \{5, 9, 12, 15\} \quad \boxtimes$$

11. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$.

Risultato: L'inversa è la matrice $\begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$.

12. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

Soluzione: Si ha $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ quindi $A + A^T$ è simmetrica. Si ha $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ quindi $A - A^T$ è antisimmetrica. Ora la scrittura richiesta è $A = \frac{(A + A^T)}{2} + \frac{(A - A^T)}{2}$.