

Esercizi di Geometria

Spazi vettoriali e sottospazi - indipendenza lineare

1. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

- (a) $\{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x + y = z\}$
- (e) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 = z^2\}$

Risultato:

- (a) No.
 - (b) Sì.
 - (c) Sì.
 - (d) Sì.
 - (e) No: per esempio, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ soddisfano la condizione, ma la loro somma $(1, 1, 2)$ no.
2. Mostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Soluzione: Scriviamo il sistema in forma matriciale come $AX = 0$, dove $A \in M_{m \times n}$ e $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ è la colonna delle incognite, e consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come matrici colonna $n \times 1$. Sia

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

l'insieme delle soluzioni del sistema. Si ha $S \neq \emptyset$ visto che $(0, 0, \dots, 0)^T$ è soluzione del sistema; inoltre se $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ e $X' = (x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n)^T$ sono due soluzioni del sistema, quindi tali che $AX = 0$ e $AX' = 0$, si ha che $aX + bX'$ è ancora una soluzione del sistema per ogni $a, b \in \mathbb{R}$; infatti $A(aX + bX') = A(aX) + A(bX') = aAX + bAX' = 0 + 0 = 0$; scelti $X, X' \in S$ abbiamo visto che $aX + bX' \in S$, e S è dunque un sottospazio.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- (b) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$
- (c) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$
- (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a + c = b + d \right\}$

Risultato:

- (a) Sì.
 - (b) Sì.
 - (c) No: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soddisfa la condizione, ma la matrice $2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no.
 - (d) Sì.
4. (★) Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$? Motivare la risposta.
- (a) $\{p(x) \mid p(2) = 0\}$
 - (b) $\{p(x) \mid p(2) = 1\}$
 - (c) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}_3[x]$ con termine noto pari a zero:
 $\{a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Risultato:

- (a) Sì.
 - (b) No.
 - (c) Sì.
5. Sia U un sottospazio di V . Mostare che
- (a) se $a\mathbf{v} \in U$ con $a \neq 0$, allora $\mathbf{v} \in U$;
 - (b) se $\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$, allora $\mathbf{u} \in U$.

Soluzione:

- (a) se $a\mathbf{v} \in U$ con $a \neq 0$, allora anche il prodotto $\frac{1}{a} \cdot (a\mathbf{v}) \in U$; quindi $\mathbf{v} \in U$.
 - (b) se $\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$, allora anche $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - \mathbf{v} \in U$; quindi $\mathbf{u} \in U$.
6. Determinare se $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ nei seguenti casi:
- (a) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
 - (b) $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
 - (c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 - (d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Risultato:

- (a) No.
- (b) Sì: $\mathbf{v} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$
- (c) No.
- (d) Sì: $\mathbf{v} = 3\mathbf{u} - \mathbf{w}$

7. Mostrare che un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ in uno spazio vettoriale V è dipendente se e solo se uno dei $\mathbf{v}_i$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori.

Soluzione: Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono dipendenti, allora esiste una loro combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0 \quad \text{con gli } a_i \text{ non tutti nulli.}$$

Sia per esempio $a_n \neq 0$: allora si ha

$a_n\mathbf{v}_n = -(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1})$, e quindi
 $\mathbf{v}_n = -\frac{1}{a_n}(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1})$; si ha un'espressione di $\mathbf{v}_n$ come combinazione lineare dei rimanenti vettori.

Supponiamo viceversa che uno dei vettori sia combinazione lineare dei rimanenti, e sia per esempio

$$\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} :$$

abbiamo allora la combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli (il coefficiente di $\mathbf{v}_n$ non è nullo)

$$\mathbf{v}_n - b_1\mathbf{v}_1 - b_2\mathbf{v}_2 - \dots - b_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = 0;$$

i vettori sono quindi dipendenti.

8. Sia V uno spazio vettoriale e $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di V . Mostare che

- (a) Se A è indipendente, ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ è indipendente.
- (b) Se A è dipendente, ogni sovrainsieme B di A , $A \subseteq B$ è dipendente.

Soluzione:

- (a) Sia A è indipendente, e supponiamo per assurdo che un sottoinsieme B di A sia dipendente. Supponiamo senza ledere la generalità che $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h\}$, $h < n$. Esiste allora una c.l. nulla dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h$ a coefficienti non tutti nulli, e sia

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_h\mathbf{v}_h = 0 \quad \text{con gli } a_i \text{ non tutti nulli.}$$

Ma allora la c.l.

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_h\mathbf{v}_h + 0\mathbf{v}_{h+1} + \dots + 0\mathbf{v}_n = 0$$

è una c.l. nulla a coefficienti non tutti nulli dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, e questo contraddice l'ipotesi che tali vettori siano indipendenti.

- (b) Se A è dipendente, esiste una c.l. nulla a coefficienti non tutti nulli, e sia

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n = 0.$$

Un sovrainsieme B di A si può scrivere come $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_s\}$; B è dipendente perché una sua c.l. nulla a coefficienti non tutti nulli è

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n + 0 \mathbf{v}_{n+1} + \dots + 0 \mathbf{v}_s = 0.$$

9. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è costituito da vettori linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \{(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7)\} & \quad \square \\ \{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (0, 1, 6, 3)\} & \quad \square \\ \{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (5, 7, 9, -1)\} & \quad \square \\ \{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (1, 1, 1, 1)\} & \quad \boxtimes \\ \{(2, 4, 6, 8), (3, 6, 9, 12)\} & \quad \square \end{aligned}$$

Nota: il primo insieme è dipendente perché 5 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre dipendenti. Il secondo insieme è dipendente perché si ha

$$(1, 2, 3, 4) + (2, 3, 4, 1) - (3, 4, 1, 2) - (0, 1, 6, 3) = (0, 0, 0, 0).$$

L'ultimo insieme è chiaramente dipendente.

10. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, k)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?

Soluzione: $k = \frac{3}{2}$.

11. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 0, k)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?

Soluzione: No.

12. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - z = 0\}$, e $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + z = 0\}$. Allora:

- (a) verificare che S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;
- (b) trovare una base e la dimensione di S e T ;
- (c) considerare l'insieme $S \cap T$; si tratta di un sottospazio? In caso affermativo, trovarne una base e la dimensione.

Risultato:

- (a)
- (b) $\dim S = \dim T = 2$. $\text{Base}(S) = \{(1, 0, 1), (0, 1, 5)\}$. $\text{Base}(T) = \{(1, 5, 0), (0, 1, 1)\}$.
- (c) $\dim(S \cap T) = 1$. $\text{Base}(S \cap T) = \{(2, -3, -13)\}$.

13. Stesso esercizio, considerando i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, \quad x + 2z = 0\},$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2w = 0\}.$$

Risultato:

- (a)
 - (b) $\dim S = 2, \dim T = 3$. $\text{Base}(S) = \{(-2, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
 $\text{Base}(T) = \{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 1)\}$.
 - (c) $\dim(S \cap T) = 1$. $\text{Base}(S \cap T) = \{(-2, 1, 1, 3/2)\}$.
14. (a) Trovare una base per lo spazio $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e calcolarne la dimensione.
- (b) Trovare una base per lo spazio $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali, e calcolarne la dimensione.
- (c) $(\star)$ Mostrare che l'insieme $T_n^i(\mathbb{R})$ delle matrici triangolari inferiori $n \times n$ a coefficienti reali è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$; trovare una base e calcolare la dimensione per tale spazio. (Nota: le matrici triangolari inferiori sono le matrici (a_{ij}) tali che $a_{ij} = 0$ per $j > i$).

Risultato:

- (a) $\dim = 4$.
- (b) $\dim = n^2$.
- (c) $\dim = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$