

Prova di autovalutazione
Geometria per Ingegneria Elettronica
dicembre 2013

1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (4x + 2y + kz, -x + y + kz, 3x + 3y + 2z)$.
2. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, 2)) = (4, 2)$ e $f((-1, 0)) = (-2, -1)$. Determinare una base per il nucleo di questa applicazione.
3. Mostrare che un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ non può essere iniettiva, e che un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ non può essere suriettiva.
4. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare; è vero che se i vettori $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti in W , allora i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V ?
5. Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta iniettiva l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, -1)) = (k, -1)$ e $f((0, 1)) = (-2, 3)$.
6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $f((x, y)) = (x + 3y, 2x - y)$. Esiste l'applicazione inversa di f , cioè un'applicazione lineare $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$? Se sì, descrivere esplicitamente f^{-1} . Qual è il legame fra le matrici A_f e $A_{f^{-1}}$?
7. ($\star$) In $\mathbb{R}^2$ si consideri il sottospazio $S = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker f = S$.
8. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 0$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile $\square$	Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni $\square$
$\operatorname{rg} A = n - 1$ $\square$	l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, non è suriettiva $\square$
Il sistema $AX = 0$ possiede infinite soluzioni $\square$	le colonne di A sono indipendenti $\square$