

Prova di autovalutazione
Geometria per Ingegneria Elettronica
12 novembre 2013

1. Descrivere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + w = 5 \\ 2x + 2y - z - 2w = 0 \\ x + 6y - 3z - 5w = -5 \end{cases}$$

Risultato: Le soluzioni sono le quaterne della forma $(\frac{5+t}{5}, \frac{-10+5s+8t}{10}, s, t)$ al variare dei due parametri s e t .

2. Mostrare che se A^2 è invertibile, allora anche A lo è.

Soluzione: Se A^2 è invertibile $\det(A^2) \neq 0$; dal Teorema di Binet si ha che $\det(A^2) = \det(A)^2$, quindi anche $\det(A)^2 \neq 0$, da cui segue che $\det(A) \neq 0$ e anche A è invertibile.

3. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile?

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 2y = -5 \\ 3x + 4y = k \end{cases}$$

Risultato: Per $k = -1$.

4. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \\ -k & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risultato: Per $k \neq 1$ il rango è 3; per $k = 1$ il rango è 2.

5. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Risultato: $\det(A) = k^2 + k - 12$.

6. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esercizio 5 è invertibile? Calcolare la matrice inversa.

Risultato: Per $k \neq -4, 3$.

$$A^{-1} = \frac{1}{k^2 + k - 12} \begin{pmatrix} -4 & 1+k & -4 \\ k & -3 & k \\ k-8 & 2k-1 & 4-k^2 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare il risultato della seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risultato:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 12 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & 84 & 42 \\ 56 & 44 & 38 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -27 & -77 & -30 \\ -47 & -36 & -29 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ è tale che $A^3 = 3I$, A è invertibile? Motivare la risposta.
 Si ha $\det(A)^3 = \det(A^3) = \det(3I) = 3^3 \det(I) = 3^3$, quindi $\det(A) \neq 0$.
9. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2k \\ 3x - 4y + 2kz = -2 \\ -kx + 4kz = 0 \end{cases}.$$

Risultato: Il sistema è compatibile e ammette soluzione unica per $k \neq 0, 1$; è compatibile con infinite soluzioni che dipendono da un parametro per $k = 0$; non è compatibile per $k = 1$.

10. Risolvere il sistema dell'esercizio precedente per $k = 0$.

Risultato: Le soluzioni sono le terne della forma $(6t - 2, \frac{9t-2}{2}, t)$ al variare dei due parametri s e t .

11. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$.

Risultato: L'inversa è la matrice $\begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$.

12. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

Soluzione: Si ha $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ quindi $A + A^T$ è simmetrica. Si ha $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ quindi $A - A^T$ è antisimmetrica. Ora la scrittura richiesta è $A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$.