

Esercizi di Geometria

Base e dimensione

1. Sia $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$. Mostare che
 - (a) Se A è indipendente, ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ è indipendente.
 - (b) Se A è dipendente, ogni sovrainsieme B di A , $A \subseteq B$ è dipendente.
2. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - z = 0\}$, e $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + z = 0\}$. Allora:
 - (a) trovare una base e la dimensione di S e T ;
 - (b) trovare una base e la dimensione di $S \cap T$;
 - (c) completare la base di S a una base di $\mathbb{R}^3$.

3. Stesso esercizio, considerando i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, \quad x + 2z = 0\},$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2w = 0\}.$$

4. Mostrare che, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$, allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si scrive **in modo unico** come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
5. Trovare una base e la dimensione del sottospazio annullatore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

6.
 - (a) Costruire una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori per ciascuno dei quali la somma delle componenti sia 2.
 - (b) È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori per ciascuno dei quali la somma delle componenti sia 0? Motivare la risposta.
7. Trovare una base e la dimensione per i due sottospazi $\text{row}(A)$ e $\text{col}(A)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Può una matrice 3×4 avere righe indipendenti? Può avere colonne indipendenti? Motivare la risposta.
9. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Sia A una matrice $m \times n$.
 - (a) Se le righe di A sono linearmente indipendenti, allora $\text{row}(A) = \mathbb{R}^n$.
 - (b) Se A ha una riga di zeri, allora il rango di A è minore di n .
 - (c) Se A ha una colonna di zeri, allora il rango di A è minore di n .
 - (d) Se $m \neq n$, la matrice ha sia le righe che le colonne indipendenti.