

II prova intermedia di Geometria (Ing. Elettronica) 21/1/2014

Cognome e nome:

Numero di matricola:

1. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid 2x - y - 3z = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid 2x - y + w = 0, z - 4y = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

sol. $\dim(S) = 3$, $\dim(T) = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$.

$\mathcal{B}_S = \{(1, 2, 0, 0), (0, -3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ $\mathcal{B}_T = \{(1, 0, 0, -2), (0, 1, -4, 0)\}$
 $\mathcal{B}_{S \cap T} = \{(13/2, 1, 4, -12)\}$.

2. Scrivere la matrice A_f associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, -2)) = (2, 3)$ e $f((0, 1)) = (-2, 4)$.

sol. $A_f = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. [questo perché $f((1, 0)) = f((1, -2)) + 2f((0, 1))$.]

3. Fra le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, quali sono suriettive?

$f(x, y, z, w) = (x + y, y + z, z)$ ☒ $f(x, y, z, w) = (x - y, 2x - 2y, y)$ ☐

$f(x, y, z, w) = (x, x, w)$ ☐ $f(x, y, z, w) = (x, y, w)$ ☒

4. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 6$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile ☒ l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è iniettiva ☒

$\operatorname{rg} A = n$ ☒ l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, non è suriettiva ☐

A ammette 6 come autovalore ☐ le colonne di A sono indipendenti ☒

5. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (2x + y + kz, 2x + 3y + kz, 5x - 2y + z)$.

sol. Per $k \neq 2/5$, l'applicazione è biettiva. Si ha $\dim(\text{Ker } f) = 0$, $\dim(\text{Im } f) = 3$; $\mathcal{B}_{\text{Ker } f} = \emptyset$, $\mathcal{B}_{\text{Im } f} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Per $k = 2/5$ si ha $\dim(\text{Ker } f) = 1$, $\dim(\text{Im } f) = 2$; $\mathcal{B}_{\text{Ker } f} = \{(1, 0, -5)\}$, $\mathcal{B}_{\text{Im } f} = \{(2, 2, 5), (1, 3, -2)\}$.

6. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

sol. Autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$
Autospazi: $V_1 = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$; $V_4 = (x, 2x, 3/2x), x \in \mathbb{R}$.
La matrice non è diagonalizzabile.

7. Se l'insieme $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ di uno spazio vettoriale V è linearmente dipendente, l'insieme $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è ancora dipendente? Motivare la risposta.

sol. La risposta è no; un controesempio si ha prendendo per esempio $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$. L'insieme $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è dipendente, ma l'insieme $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è indipendente.