

Esercizi di Geometria

Inversa di una matrice

1. Dopo aver calcolato i determinanti delle seguenti matrici

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & 4 & -9 \end{pmatrix};$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

calcolare la matrice inversa di quelle matrici sopra riportate che risultano essere invertibili.

2. Calcolare il determinante di

(a)

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ k & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici risultano invertibili? Calcolare le matrici inverse.

3. Per quali valori di k, h è invertibile la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & h \\ h & 0 & k \\ k & h & 0 \end{pmatrix}?$$

Calcolare la matrice inversa.

4. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Siano A, B due matrici quadrate dello stesso ordine.
- (a) Se A è una matrice tale che $A^2 = I$, allora $\det(A) = \pm 1$.
 - (b) Se $A^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora $\det(A) = 1$.
 - (c) Se $\det(A) = 1$, allora $A = I$.
 - (d) Se $\det(AB) = 0$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$.
 - (e) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
 - (f) $\det(-A) = -\det(A)$.
 - (g) Se la diagonale principale di A consiste di soli zeri, allora $\det(A) = 0$.
 - (h) Se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
 - (i) Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = AC$, allora $B = C$.
 - (j) $\det(AB) = \det(BA)$
 - (k) Se A^2 è invertibile, allora anche A lo è.
 - (l) Se A è invertibile e $AC = I$, allora $C = A^{-1}$.
 - (m) Se A e B sono invertibili, allora anche AB lo è.
 - (n) Se A e B sono invertibili, allora anche $A + B$ lo è.