

Esercizi di Geometria

Spazi vettoriali e sottospazi - indipendenza lineare

1. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.
 - (a) $\{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 - (b) $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$
 - (c) $\{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 - (d) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x + y = z\}$
 - (e) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 = z^2\}$
2. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Mostrare che
 - (a) se $a\mathbf{v} \in U$ con $a \neq 0$, allora $\mathbf{v} \in U$;
 - (b) se $\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$, allora $\mathbf{u} \in U$.
3. Determinare se $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ nei seguenti casi:
 - (a) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
 - (b) $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
4. Mostrare che un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è dipendente se e solo se uno dei $\mathbf{v}_i$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori.
5. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è costituito da vettori linearmente indipendenti
 - $\{(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7)\}$ $\square$
 - $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (0, 1, 6, 3)\}$ $\square$
 - $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (5, 7, 9, -1)\}$ $\square$
 - $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ $\square$
 - $\{(2, 4, 6, 8), (3, 6, 9, 12)\}$ $\square$
6. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, k)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?
7. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 0, k)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?
8. Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, mostrare che $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.
9. Sia $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Mostrare che l'insieme $\{\mathbf{v}\}$ è indipendente.