

Matematica Discreta

Foglio 2

- Usando l'algoritmo euclideo, trovare il massimo comun divisore d fra gli interi N e M ; trovate poi due interi x e y tali che si abbia $d = Nx + My$, nei seguenti casi:
 - $N = 62$ e $M = 44$.
 - $N = 721$ e $M = 448$.
 - $N = 2406$ e $M = 654$.
- Dimostrare che se n è un intero non primo ≥ 2 , allora esiste un numero primo p tale che $p|n$ e $p^2 \leq n$.
- Trovare soluzioni intere per le seguenti equazioni:
 - $x + 4y = 11$;
 - $12x + 29y = 11$.
- Sia n un intero positivo.
 - “Calcolare” $2n \bmod n$, $(5n + 7) \bmod n$, $(3n - 2) \bmod n$.
 - “Calcolare” $(n+2) \bmod (n+1)$, $(2n+2) \bmod (n+1)$, $n^2 \bmod (n+1)$, $(n^2 + 1) \bmod (n+1)$, $(n^2 - 1) \bmod (n+1)$.
 - “Calcolare” $(n+1)^2 \bmod n$, $(n^3 + 2n^2 + 4) \bmod n$, $n! \bmod n$.
- Senza eseguire le moltiplicazioni per esteso, mostrare che si ha
 - $1234567 \times 90123 \equiv 1 \pmod{10}$;
 - $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.
- Quando è possibile, trovare tutti i valori di x che soddisfano le seguenti congruenze.
 - $7x \equiv 3 \pmod{10}$;
 - $5x \equiv 3 \pmod{10}$;
 - $3x \equiv 19 \pmod{29}$;
 - $6x \equiv 21 \pmod{15}$;
 - $-4x \equiv 6 \pmod{10}$;
 - $x \equiv 4^{2546} \pmod{5}$.

7. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_{27} , \mathbb{Z}_{30} e \mathbb{Z}_{48} .
8. Determinare l'inverso di $\bar{7}$ in \mathbb{Z}_{27} , \mathbb{Z}_{30} e \mathbb{Z}_{48} .
9. Dimostrare che, se x e y sono invertibili in \mathbb{Z}_n , allora anche xy e x^{-1} lo sono.
10. Risolvere, se è possibile, le seguenti equazioni:
 - (a) $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$ in \mathbb{Z}_7 ;
 - (b) $x^2 - \bar{2}x + \bar{8} = \bar{0}$ in \mathbb{Z}_{11} ;
 - (c) $x^2 + x - \bar{6} = \bar{0}$ in \mathbb{Z}_{13} .