

Esercizi di matematica discreta

Foglio 2

1. (a) Se a è pari e b è dispari, mostrare che si ha $(a, b) = (a/2, b)$
(b) Se a e b sono pari, mostrare che si ha $(a, b) = 2(a/2, b/2)$
2. Usando l'algoritmo euclideo, trovare il massimo comun divisore d fra gli interi N e M ; trovate poi due interi x e y tali che si abbia $d = Nx + My$, nei seguenti casi:
 - (a) $N = 62$ e $M = 44$.
 - (b) $N = 721$ e $M = 448$.
 - (c) $N = 2406$ e $M = 654$.
3. Dimostrare che se n è un intero non primo ≥ 2 , allora esiste un numero primo p tale che $p|n$ e $p^2 \leq n$.
4. Se p è un numero primo, mostrare che se $p|ab$ allora $p|a$ o $p|b$.
5. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per le seguenti equazioni:
 - (a) $x + 4y = 11$;
 - (b) $12x + 29y = 11$;
 - (c) $63 = 333x + 180y$;
 - (d) $153x + 45y = 18$.
6. Sia n un intero positivo.
 - (a) "Calcolare" $2n \bmod n$, $(5n + 7) \bmod n$, $(3n - 2) \bmod n$.
 - (b) "Calcolare" $(n+2) \bmod (n+1)$, $(2n+2) \bmod (n+1)$, $n^2 \bmod (n+1)$, $(n^2 + 1) \bmod (n+1)$, $(n^2 - 1) \bmod (n+1)$.
 - (c) "Calcolare" $(n+1)^2 \bmod n$, $(n^3 + 2n^2 + 4) \bmod n$, $n! \bmod n$.
7. Senza eseguire le moltiplicazioni per esteso, mostrare che si ha
 - (a) $1234567 \times 90123 \equiv 1 \bmod 10$;
 - (b) $2468 \times 13579 \equiv -3 \bmod 25$.