

Esercizi di matematica discreta

Foglio 1

1. Se A è un insieme con 5 elementi e B è un insieme con 9 elementi, quali dei seguenti numeri possiamo ottenere come cardinalità di $A \cup B$: 4,6,9,10,14, 20?
2. Quanti sono i sottoinsiemi di $A = \{a, b, c, d, e\}$ che contengono c ma non d ? Elencarli.
3. Siano $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ con $f(d) = 2$?
4. Siano $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Quante sono le funzioni $f : A \rightarrow B$ con $f(a) > a$?
5. In quanti modi diversi si può riempire una colonna di una schedina del totocalcio?
6. Ho 20 regali da distribuire a 12 bambini, in modo del tutto arbitrario: può capitare, per esempio, che si diano tutti e 20 i regali a un unico bambino. In quanti modi diversi posso distribuire i regali?
7. Ho regali di 20 tipi diversi, da distribuire a 12 bambini. In quanti modi diversi posso distribuire i regali, se ogni bambino può ricevere al più un regalo per ogni tipo?
8. Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\sum_0^n (4k + 1) = (2n + 1)(n + 1).$$

9. L'insieme A ha 4 elementi, e so che il numero di funzioni iniettive da A in B è 840. Quanti elementi ha B ?
10. Siano
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$
determinare $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$.

11. Quanti anagrammi ha la parola DITO? E la parola DADO?
12. Dimostrare che si ha $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$.
13. Dimostrare che si ha $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.
14. Dimostrare che si ha $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots = 0$.