

Esercizi di matematica discreta

Foglio 3

1. Quando è possibile, trovare tutti i valori di x che soddisfano le seguenti congruenze.

- (a) $7x \equiv 3 \pmod{10}$;
- (b) $5x \equiv 3 \pmod{10}$;
- (c) $3x \equiv 19 \pmod{29}$;
- (d) $6x \equiv 21 \pmod{15}$;
- (e) $-4x \equiv 6 \pmod{10}$;
- (f) $x \equiv 4^{2546} \pmod{5}$.

2. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{30}$ e $\mathbb{Z}_{48}$.

3. Determinare l'inverso di $\bar{7}$ in $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{30}$ e $\mathbb{Z}_{48}$.

4. Dimostrare che, se x e y sono invertibili in $\mathbb{Z}_n$, allora anche xy e x^{-1} lo sono.

5. Determinare, se è possibile, un $a \in \mathbb{Z}$ in modo tale che la congruenza $ax \equiv 336 \pmod{1500}$ abbia esattamente 12 soluzioni non congrue tra loro modulo 1500.

6. Risolvere, se è possibile, le seguenti equazioni:

- (a) $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_7$;
- (b) $x^2 - \bar{2}x + \bar{8} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_{11}$;
- (c) $x^2 + x - \bar{6} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_{13}$.

7. Risolvere i sistemi di congruenze:

- (a)
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv -7 \pmod{10} \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} x \equiv 16 \pmod{20} \\ x \equiv 13 \pmod{21} \end{cases}$$

8. Se da un cesto di uova si tolgono le uova a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque, a sei a sei, nel cesto resta un uovo. Se si tolgono a sette a sette, non ne resta nessuno. Qual è il minimo numero di uova che può contenere il cesto?