Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
29 Gennaio 2018

II Esonero - Testo A

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1. (20%)

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione esponenziale di parametro λ e sia $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

i) Determinare la funzione generatrice dei momenti di Y e la sua distribuzione.

ii) Calcolare il valor medio della variabile Y

iii) Calcolare la varianza $var(Y)$

iv) Per $n = 100$ determinare i valori di λ tali che $var(Y) < 1$

Soluzione

i) La funzione generatrice dei momenti di una variabile esponenziale è:

$$\Phi_X(t) = \mathbf{E}e^{tX} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

da cui

$$\Phi_Y(t) = \mathbf{E}e^{tY} = \Pi_{i=1}^n \Phi_{X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

dunque $Y \sim Gamma(n, \lambda)$

ii)

$$\mathbf{E}Y = \sum_{1=1}^n \mathbf{E}X_i = n\frac{1}{\lambda}$$

iii)

$$varY = \sum_{1=1}^n varX_i = n\frac{1}{\lambda^2}$$

iv)

$$n\frac{1}{\lambda^2} = \frac{100}{\lambda^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 10$$

Nome:____

Esercizio 2. (20%)

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione normale di media nulla e varianza 4.

i) Determinare la distribuzione della media campionaria $\bar{X}$

ii) Calcolare $P(\bar{X} > \frac{2}{\sqrt{n}})$

iii) Determinare la distribuzione della varianza campionaria S^2

Si ricordano i seguenti valori $\Phi(2) \simeq 0.9772$, $\Phi(1) \simeq 0.8413$.

Soluzione

i) La media campionaria ha distribuzione normale con media 0 e varianza $\frac{4}{n}$.

ii)

$$P(\bar{X} > \frac{2}{\sqrt{n}}) = P\Big(\frac{\bar{X}}{2/\sqrt{n}} > 1) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

iii) Per la varianza campionaria abbiamo

$$\frac{(n-1)S^2}{4} \sim \chi^2_{n-1}$$

Nome:______________________________________

Esercizio 3.(20%)

Si sono raccolti per un anno i dati relativi al numero di incidenti mensili su un tratto di autostrada ottenendo la seguente tabella

$$(3, 1, 2, 4, 3, 4, 3, 2, 2, 3, 1, 2)$$

Si assuma che il numero di incidenti in ogni mese dell'anno siano variabili indipendenti ed identicamente distribuite. Determinare la stima di massima verosimiglianza per la media degli incidenti mensili.

Soluzione

Assumiamo che la variabile casuale X_i indichi il numero di incidenti nell'i-esimo mese dell'anno, e che essa sia distribuita come una variabile di Poisson. Inoltre le variabili X_i sono per ipotesi indipendenti ed identicamente distribuite Lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro di una poissoniana è la media campionaria $\bar{X}$, ed il parametro della poissoniana coincide con la sua media. La stima di massima verosimiglianza che otteniamo dai dati è dunque $\hat{\lambda} = 2.5$.

Nome:______________________________________

Esercizio 4. (20%)

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza $\sigma^2 = 100$.

i) Determinare un intervallo di confidenza unilaterale destro per μ, diciamo $(A, +\infty)$ a livello 95% sapendo che $\bar{x} = 20$.

ii) Determinare la minima ampiezza n del campione per avere che $A > \bar{X}/2$

Si ricordi che $z_{0.025} \simeq 1.96$, $z_{0.05} \simeq 1.645$.

Soluzione
L'intervallo di confidenza unilaterale destro per la media di una normale quando è nota la sua varianza è dato da

$$\left(\bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

dunque nel nostro caso $A = 20 - 1.645\frac{10}{\sqrt{n}}$ Per avere $A > 10$ dobbiamo imporre $1.645\frac{10}{\sqrt{n}} < 10$ e dunque $n > (1.645)^2$, cioè $n \geq 3$.

Nome:____

Esercizio 5.(20%)
Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_4)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza 25. Sappiamo che $\bar{x} = 2.5$. Vogliamo verificare l'ipotesi nulla

$$H_0: \ \mu = 3$$

contro

$$H_1: \ \mu \neq 3$$

i) Fissando il livello di significatività $\alpha = 5\%$ determinare se l'ipotesi H_0 è accettata.

ii) Determinare il p-dei-dati.

iii) Determinare per quali valori del livello di significatività α l'ipotesi H_0 è rifiutata.

Si ricordi che $\Phi(0.2) \simeq 0.579$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, $z_{0.025} \simeq 1.96$, $z_{0.05} \simeq 1.645$.

Soluzione
Si tratta di un test a due code. La statistica del test è

$$\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$$

ed l'ipotesi H_0 è rifiutata a livello di significatività α se questa statistica assume un valore maggiore di $z_{\alpha/2}$. Il valore assunto dalla statistica è:

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \frac{|2.5 - 3|}{5/2} = 0.2$$

e poiché $0.2 < z_{0.025}$ l'ipotesi H_0 è accettata. Il p-dei-dati è

$$P(|Z| > 0.2) = 2P(Z > 0.2) = 2(1 - \Phi(0.2)) = 2(0.421) = 0.842$$

Questo implica che l'ipotesi H_0 è rifiutata per ogni livello di significatività $\alpha > 0.842$.