Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
29 Gennaio 2018

II Esonero - Testo B

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1. (20%)

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_{10})$ estratto da una distribuzione Gamma di parametri α e λ, con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$

con $\Gamma(\alpha)$ funzione gamma di Eulero. Sia $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$.

i) Determinare la funzione generatrice dei momenti di Y e la sua distribuzione.

ii) Calcolare il valor medio della media campionaria $\bar{X} = \frac{Y}{10}$

iii) Calcolare la varianza $var(\bar{X})$

iv) Per $\lambda = 1$ determinare i valori di α tali che $var(\bar{X}) < 1$

Soluzione

i) La funzione generatrice dei momenti di una variabile Gamma(α, λ) è:

$$\Phi_X(t) = \mathbf{E}e^{tX} = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^\alpha$$

da cui

$$\Phi_Y(t) = \mathbf{E}e^{tY} = \Pi_{i=1}^n \Phi_{X_i}(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^{n\alpha}$$

con $n = 10$, dunque $Y \sim Gamma(10\alpha, \lambda)$

ii)

$$\mathbf{E}Y = \sum_{1=1}^{10} \mathbf{E}X_i = 10\frac{\alpha}{\lambda}$$

e dunque $\mathbf{E}\bar{X} = \frac{\alpha}{\lambda}$.

iii)

$$var\bar{X} = \frac{1}{100} var(Y) \frac{1}{100} \sum_{1=1}^{10} var(X_i) = \frac{\alpha}{10\lambda^2}$$

iv)

$$\frac{\alpha}{10} < 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha < 10$$

Nome:______________________________________

Esercizio 2. (20%)

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione normale di media $\mu = 9$ e varianza σ^2. Sia $n = 64$

i) Determinare la distribuzione della media campionaria $\bar{X}$

ii) Determinare il valore di σ tale che $P(\bar{X} > 10) = 0.05$

iii) Determinare la distribuzione della varianza campionaria S^2

Si ricordano i seguenti valori $z_{0.05} \simeq 1.645$, $z_{0.025} \simeq 1.96$.

Soluzione

i) La media campionaria ha distribuzione normale con media 9 e varianza $\frac{\sigma^2}{64}$.

ii)
$$P(\bar{X} > 10) = P\Big(\frac{\bar{X} - 9}{\sigma/8} > \frac{10 - 9}{\sigma/8}\Big) = P(Z > \frac{8}{\sigma}) = 0.05$$
da cui $z_{0.05} = \frac{8}{\sigma}$ cioè $\sigma = \frac{8}{1.645} \simeq 4.86$

iii) Per la varianza campionaria abbiamo
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$
e dunque
$$\frac{63}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{63}$$

Nome:______________________________________

Esercizio 3.(20%)

Una compagnia di assicurazioni ha ricevuto nella settimana il numero di richieste di rimborso seguente

$$(5, 4, 7, 6, 8)$$

Si assuma che il numero di richieste di rimborso di ciascun giorno della settimana, siano variabili indipendenti identicamente distribuite. Determinare la stima di massima verosimiglianza per la media del numero di richieste di rimborso giornaliero. Sapendo che il numero di assicurati è $n = 6000$ e supponendo che ciascuno di essi abbia la stessa probabilità di avere un incidente, valutare la probabilità di singolo incidente giornaliero (assumendo anche che il numero di incidenti sia dato dalla somma di un gran numero di v.a.i.i.d. bernoulliane).

Soluzione

Assumiamo che la variabile casuale X_i indichi il numero di richieste di rimborso nell'i-esimo giorno della settimana, e che essa sia distribuita come una variabile di Poisson. Inoltre le variabili X_i sono per ipotesi indipendenti ed identicamente distribuite Lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro di una poissoniana è la media campionaria $\bar{X}$ ed il parametro coincide col valore medio. La stima di massima verosimiglianza che otteniamo dai dati è dunque $\hat{\lambda} = 6$. Assumendo la distribuzione degli incidenti come limite di una binomiale di parametri n e p abbiamo $\lambda = np$ da cui otteniamo la stima per $p = 6/6000$ cioè l'uno per mille.

Nome:____

Esercizio 4. (20%)

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza $\sigma^2 = 100$.

i) Determinare un intervallo di confidenza unilaterale sinistro per μ, diciamo $(-\infty, B)$ a livello 95% sapendo che $\bar{x} = 10$.

ii) Determinare la minima ampiezza n del campione per avere che $B < 2\bar{X}$

Si ricordi che $z_{0.025} \simeq 1.96$, $z_{0.05} \simeq 1.645$.

Soluzione
L'intervallo di confidenza unilaterale sinistro per la media di una normale quando è nota la sua varianza è dato da

$$\Big(-\infty, \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Big)$$

dunque nel nostro caso $B = 10 + 1.645 \frac{10}{\sqrt{n}}$ Per avere $B < 20$ dobbiamo imporre $1.645 \frac{10}{\sqrt{n}} < 10$ e dunque $n > (1.645)^2$, cioè $n \geq 3$.

Nome:______________________________________

Esercizio 5.(20%)
Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_{100})$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza 1. Sappiamo che $\bar{x} = 5.2$. Vogliamo verificare l'ipotesi nulla

$$H_0: \ \mu = 5$$

contro

$$H_1: \ \mu \neq 5$$

i) Fissando il livello di significatività $\alpha = 5\%$ determinare se l'ipotesi H_0 è accettata.

ii) Determinare il p-dei-dati.

iii) Determinare per quali valori del livello di significatività α l'ipotesi H_0 è rifiutata.

Si ricordi che $\Phi(0.2) \simeq 0.579$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, $z_{0.025} \simeq 1.96$, $z_{0.05} \simeq 1.645$.

Soluzione
Si tratta di un test a due code. La statistica del test è

$$\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$$

ed l'ipotesi H_0 è rifiutata a livello di significatività α se questa statistica assume un valore maggiore di $z_{\alpha/2}$. Il valore assunto dalla statistica è:

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \frac{0.2}{1/10} = 2$$

e poiché $2 > z_{0.025}$ l'ipotesi H_0 è rifiutata. Il p-dei-dati è

$$P(|Z| > 2) = 2P(Z > 2) = 2(1 - \Phi(2)) = 2(1 - 0.977) = 0.045$$

Questo implica che l'ipotesi H_0 è rifiutata per ogni livello di significatività $\alpha > 0.045$.