Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
27 Novembre, 2017

I Esonero - Testo B

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1. (11%)

Si sono ottenuti i seguenti risultati in 11 misurazioni della quantità X:
4 volte il valore 4
3 volte il valore 5
1 volta il valore 6
2 volte il valore 2
1 volta il valore 3

1. Calcolare la media campionaria
2. Calcolare la varianza campionaria
3. Calcolare la mediana

Soluzione

$$\bar{X} = 4; \quad s^2 = 1,6; \quad \text{mediana} = 4$$

Nome:____

Esercizio 2. (20%)

Lancio 6 volte un tetraedro le cui facce sono numerate da 1 a 4 e che ha uguale probabilità di dare in ogni singolo lancio un risultato tra $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Definire lo spazio degli esiti possibili e la sua cardinalità.
2. Determinare il numero degli esiti che al secondo lancio hanno 2.
3. Determinare la probabilità che al secondo lancio si abbia 2.
4. Determinare il numero degli esiti che hanno esattamente 3 volte 1.
5. Determinare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte 1.

Soluzione
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^6$, cioè $\omega = (a_1, a_2, ..., a_6)$ con $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ per ogni $\omega \in \Omega$. La sua cardinalità è

$$|\Omega| = 4^6.$$

$$|\{\omega \in \Omega : \ a_2 = 2\}| = 4^5$$

$$P(a_2 = 2) = \frac{1}{4}$$

$$|\{\omega \in \Omega : \ \sum_{i=1}^{6} \mathbb{1}_{\{a_i=1\}} = 3\}| = \binom{6}{3} 3^3$$

$$P(\text{esattamente 3 volte 1}) = \binom{6}{3} \frac{3^3}{4^6}$$

Nome:____

Esercizio 3.(23%)

Si hanno 4 urne. Tre di esse contengono 4 palline, di cui 2 bianche e 2 nere mentre un'altra urna contiene 6 palline, di cui 4 bianche e 2 nere. Si sceglie a caso una delle quattro urne con uguale probabilità e si estrae a caso una pallina dall'urna scelta.

1. Determinare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
2. Sapendo che la pallina estratta è bianca, valutare la probabilità di aver scelto un'urna contenente 6 palline.
3. Supponiamo adesso che dopo aver scelto a caso l'urna estraiamo 2 palline senza rimpiazzo. Calcolare la probabilita' che entrambe siano bianche.

Soluzione

Denotando con B l'evento estrazione di una pallina bianca ed U_4 e U_6 rispettivamente l'evento di aver scelto un'urna con 4 o 6 palline, abbiamo

$$P(B) = P(B \cap U_4) + P(B \cap U_6) =$$

$$P(B|U_4)P(U_4) + P(B|U_6)P(U_6) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{24}$$

$$P(U_6|B) = \frac{P(B \cap U_6)}{P(B)} = \frac{4}{13}$$

$$P(BB) = P(BB \cap U_4) + P(BB \cap U_6) =$$

$$P(BB|U_4)P(U_4) + P(BB|U_6)P(U_6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{40}$$

Nome:______________________________________

Esercizio 4. (23%)

Si considerino due variabili aleatorie X e Y con distribuzione congiunta data dalle seguente densità di probabilità

$$f(x,y) = ax\mathbb{1}_{\{x\in[0,1],\, y\in[0,1],\, x\geq y\}}$$

1. Determinare il valore della costante a.
2. Calcolare le due densità marginali e i due valori medi EX e EY.
3. Determinare se le variabili X ed Y sono indipendenti.
4. Determinare la covarianza $Cov(X,Y)$.

Soluzione

Tenendo conto delle restrizioni imposte dalla funzione caratteristica dobbiamo porre

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, ax\mathbb{1}_{\{x\geq y\}} = a\int_0^1 dx\, x\int_0^x dy = 1$$

da cui $a = 3$. Integrando la densità $f(x,y)$ in y otteniamo la densità marginale f_X, non nulla per $x \in [0,1]$, che vale

$$f_X(x) = 3x\int_0^x dy = 3x^2$$

e integrando in x otteniamo la densità marginale f_Y, non nulla per $y \in [0,1]$, che vale

$$f_Y(y) = 3\int_y^1 dx = \frac{3}{2}(1-y^2).$$

Le variabili aleatorie X ed Y non sono indipendenti. Per i valori medi otteniamo:

$$EX = 3\int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$EY = \frac{3}{2}\int_0^1 y(1-y^2)dx = \frac{3}{8}$$

$$E(XY) = 3\int_0^1 dx\int_0^1 dy x^2 y\mathbb{1}_{\{x\geq y\}} = 3\int_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \frac{3}{10}.$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EX\, EY = \frac{3}{10} - \frac{9}{32} = \frac{3}{160}$$

Nome:____

Esercizio 5.(23%)

La produzione giornaliera di una azienda è una variabile aleatoria X con media $\mu = 10$. La sua varianza dipende dal numero $n \geq 1$ di operai in servizio ed è data da $\sigma^2 = \frac{1}{n}$.

1. Quando c'e' un solo operaio in servizio stimare la probabilità che il numero di prodotti della giornata sia maggiore di 8 e minore di 12.
2. Stimare il minimo numero di operai necessari per avere che questa probabilità sia maggiore di 0,9.

Soluzione

$$P(8 < X < 12) = P(|X - 10| < 2) = 1 - P(|X - 10| \geq 2)$$

Dalla disuguaglianza di Chebyshev otteniamo

$$P(|X - 10| \geq 2) \leq \frac{1}{4}$$

da cui otteniamo

$$P(8 < X < 12) \geq \frac{3}{4}.$$

Per un arbitrario n abbiamo

$$P(|X - 10| \geq 2) \leq \frac{1}{4n}$$

da cui la condizione

$$\frac{1}{4n} < \frac{1}{10} \quad \text{cioè} \quad n > \frac{10}{4} \quad \text{e dunque} \quad n \geq 3$$