Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
20 Febbraio 2018

Scritto del 20-2-18 - Testo A

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1.

Si estraggano 5 carte da un mazzo da poker di 52 carte. Determinare la probabilità di avere tutte le carte dello stesso seme.

Soluzione

In base al principio di enumerazione e data l'equiprobabilità degli esiti otteniamo

$$P(\text{colore}) = \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

Nome:____

Esercizio 2.

Un' urna contiene 5 monete, 3 sono eque e 2 sono false perché hanno testa su entrambe le facce. Prendo a caso una moneta dall'urna e la lancio.

i) Qual'è la probabilità di ottenere testa?

ii) Sapendo che è uscita testa determinare la probabilità di aver estratto una moneta falsa.

Soluzione

Denotando con F l'evento "estratta una moneta falsa" e con T l'evento "é uscita testa", per la formula della probabilità totale abbiamo:

$$P(T) = P(T|F)P(F) + P(T|F^c)P(F^c) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$$

Dalla formula di Bayes otteniamo

$$P(F|T) = \frac{P(T|F)P(F)}{P(T)} = \frac{20}{35}$$

Nome:______________________________________

Esercizio 3.

Si hanno un dado ed una moneta. Sia X il risultato del lancio del dado e sia $M = +1$ se esce testa ed $M = -1$ se esce croce. Sia infine $Y = X + M$.

i) Determinare media e varianza di Y

ii) X ed Y sono variabili indipendenti? Determinare la loro distribuzione congiunta.

iii) Determinare la covarianza $Cov(X, Y)$.

Soluzione

X ed M sono variabili indipendenti.

i)

$$E(X + M) = E(X) + E(M) = 3.5 \qquad var(Y) = var(X) + var(M) = \frac{35}{12} + 1 = \frac{47}{12}$$

ii) X ed Y non sono variabili indipendenti. La loro distribuzione congiunta è:

$$P(X = x,\ Y = y) = \frac{1}{12}\mathbb{1}_{\{|x-y|=1\}} \quad x = 1, 2, ..., 6$$

iii) Per determinare la covarianza ricordiamo che

$$Cov(X, Y) = Cov(X, X + M) = Cov(X, X) + Cov(X, M) = var(X) = \frac{35}{12}$$

Nome:____

Esercizio 4.

Le variabili $X_1, ..., X_n$ sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di Bernoulli di parametro p.

i) Determinare la loro media, la loro varianza e la probabilità

$$P(X_1 = X_2 = ... = X_n)$$

ii) Se $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, determinare la distribuzione di Y, la sua media e la sua varianza.

iii) Se Z è una variabile indipendente con distribuzione binomiale di parametri m e p, determinare la distribuzione della variabile aleatoria $Y + Z$.

Soluzione

Per $X_i \sim Ber(p)$ abbiamo $EX_i = p$ e $var(X_i) = p(1-p)$.

$P(X_1 = X_2 = ... = X_n) = P(X_1 = X_2 = ... = X_n = 1) + P(X_1 = X_2 = ... = X_n = 0) = p^n + (1-p)^n$

Se $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, abbiamo $Y \sim Bin(n, p)$ la sua media è np e la sua varianza $np(1-p)$. Se Z è una variabile indipendente con distribuzione binomiale di parametri m e p, la distribuzione della variabile aleatoria $Y + Z$ è ancora binomiale di parametri $n + m$ e p.

Nome:_______________________________________

Esercizio 5.

Determinare la stima di massima verosimiglianza per μ e σ per una popolazione normale (o gaussiana) dai seguenti dati:

$$2, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 4, 2, 1, 1$$

Soluzione

Lo stimatore di massima verosimiglianza per la media è la media campionaria $\bar{X}$ e per la varianza $\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$ da cui otteniamo le stime 2 e $\sqrt{\frac{10}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ rispettivamente per μ e σ.

Nome:____

Esercizio 6.

Supponendo di sapere che la varianza del campione normale riportato nell'esercizio 5 sia unitaria, determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la media μ.
Si ricordi $z_{0,05} \simeq 1.645$ e $z_{0.025} \simeq 1.96$.

Soluzione

Un intervallo di confidenza al 95% per la media di una distribuzione normale con varianza nota è dato da

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

e dunque nel nostro caso

$$\left(2 - 1.96\frac{1}{\sqrt{12}}, 2 + 1.96\frac{1}{\sqrt{12}}\right).$$