Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
20 Febbraio 2018

Scritto del 20-2-18 - Testo B

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1.

Si estraggano 5 carte da un mazzo da poker di 52 carte. Determinare la probabilità di avere un poker.

Soluzione

In base al principio di enumerazione e data l'equiprobabilità degli esiti otteniamo

$$P(\text{poker}) = \frac{13 \times 48}{\binom{52}{5}}$$

Nome:____

Esercizio 2.

Un'urna contiene due dadi, uno di essi è equo e l'altro è falso perché riporta lo stesso numero (da 1 a 3) su facce opposte. Prendo a caso un dado e lo lancio.

i) Qual'è la probabilità di ottenere 2?

ii) Sapendo che è uscito 2 determinare la probabilità di aver estratto il dado falso.

Soluzione

Denotando con F l'evento "estratto il dado falso" e con D l'evento " è uscito 2", per la formula della probabilità totale abbiamo:

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|F^c)P(F^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Dalla formula di Bayes otteniamo

$$P(F|D) = \frac{P(D|F)P(F)}{P(D)} = \frac{2}{3}$$

Nome:____

Esercizio 3.

Si hanno due variabili X ed Y indipendenti identicamente distribuite secondo la distribuzione di Bernoulli di parametro p

i) Determinare media e varianza di $Z = 2X + Y$

ii) Determinare la distribuzione di Z. Le variabili Z ed X sono indipendenti?

iii) Determinare la covarianza $Cov(Z, X)$.

Soluzione

X ed Y sono variabili indipendenti.

i)

$$E(Z) = E(2X+Y) = 2E(X)+E(Y) = 3p, \qquad var(2X+Y) = 4var(X)+var(Y) = 5p(1-p)$$

ii) La variabile Z assume valori $0, 1, 2, 3$ con probabilità

$$p_0 = (1-p)^2,\ p_1 = p_2 = p(1-p),\ p_3 = p^2.$$

Z ed X non sono variabili indipendenti.

iii)

$$Cov(Z, X) = Cov(2X + Y, X) = Cov(2X, X) + Cov(Y, X) = 2var(X) = 2p(1-p)$$

Nome:____

Esercizio 4.

Le variabili $X_1, ..., X_n$ sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di esponenziale di parametro $\lambda = 2$.

i) Determinare la loro media, la loro varianza e la probabilità

$$P(X_i \leq 1 \quad \forall i = 1, ..., n)$$

ii) Se $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, determinare la distribuzione di Y, la sua media e la sua varianza.

iii) Se Z è una variabile indipendente con distribuzione Gamma di parametri α e $\lambda = 2$, determinare la distribuzione della variabile aleatoria $Y + Z$.

Soluzione

Per $X_i \sim Exp(2)$ abbiamo $EX_i = \frac{1}{2}$ e $var(X_i) = \frac{1}{4}$.

$$P(X_i \leq 1 \ \forall i = 1, ..., n) = \left(1 - e^{-2}\right)^n$$

Se $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, la distribuzione di Y, è una Gamma di parametri $\alpha = n$ e $\lambda = 2$ con $EY = \frac{n}{2}$ e $var(Y) = \frac{n}{4}$.
Se Z è una variabile indipendente con distribuzione Gamma di parametri α e $\lambda = 2$, la distribuzione della variabile aleatoria $Y + Z$ è ancora una Gamma di parametri $\alpha + n$ e 2.

Nome:____

Esercizio 5.

Determinare la stima di massima verosimiglianza per μ e σ per una popolazione normale (o gaussiana) dai seguenti dati:

$$1, 1, 0, -1, -2, 0, 1, 2, -2, 1, 1, -2$$

Soluzione

Lo stimatore di massima verosimiglianza per la media è la media campionaria $\bar{X}$ e per la varianza $\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$ da cui otteniamo le stime 0 e $\sqrt{\frac{22}{12}} = \sqrt{\frac{11}{6}}$ rispettivamente per μ e σ.

Nome:______________________________________

Esercizio 6.

Supponendo di sapere che la varianza del campione normale riportato nell'esercizio 5 abbia valore 2, determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la media μ.
Si ricordi $z_{0,05} \simeq 1.645$ e $z_{0.025} \simeq 1.96$.

Soluzione

Un intervallo di confidenza al 95% per la media di una distribuzione normale con varianza nota è dato da

$$\Big(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

e dunque nel nostro caso

$$\Big(- 1.96\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}, +1.96\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}\Big)$$

cioè

$$\Big(- 1.96\frac{1}{\sqrt{6}}, +1.96\frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$