Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
20 Settembre 2018

# Scritto del 20 - 9 -18

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |

**Esercizio 1.**

Un' urna contiene 3 palline nere, 3 palline bianche e 4 gialle. Si effettuano due estrazioni senza rimpiazzo.

i) Calcolare la probabilità che entrambe le palline siano nere.

ii) Calcolare la probabilità che una sia bianca e l'altra nera.

iii) Calcolare la probabilità che almeno una sia gialla.

**Soluzione**

Siano $E_i, E_{ii}$ ed $E_{iii}$ gli eventi relativi alle tre domande.

$$P(E_i) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P(E_{ii}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{5}$$

Calcolo la probabilità dell'evento complementare, $E_{iii}^c$, nessuna è gialla:

$$P(E_{iii}^c) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_{iii}) = 1 - P(E_{iii}^c) = \frac{2}{3}.$$

Nome:________________________________________

**Esercizio 2.** Un' urna contiene 6 monete, 4 sono eque e 2 sono false perché hanno testa su entrambe le facce. Prendo a caso una moneta dall'urna e la lancio.

i) Qual'è la probabilità di ottenere testa?

ii) Sapendo che è uscita testa determinare la probabilità di aver estratto una moneta falsa.

**Soluzione** Denotando con $F$ l'evento "estratta una moneta falsa" e con $T$ l'evento "é uscita testa", per la formula della probabilità totale abbiamo:

$$P(T) = P(T|F)P(F) + P(T|F^c)P(F^c) = \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Dalla formula di Bayes otteniamo

$$P(F|T) = \frac{P(T|F)P(F)}{P(T)} = \frac{1}{2}$$

Nome:________________________________________

**Esercizio 3.**

Siano $X$ e $Y$ variabili di Poisson indipendenti di parametri $\lambda$ e $2\lambda$ rispettivamente.

i) Determinare la funzione generatrice dei momenti, la media e la varianza di $X$.

ii) Determinare la probabilità che $X > 2$.

iii) Determinare la distribuzione di $X + Y$.

iv) Determinare la probabilità che $X + Y > 2$

**Soluzione**

i) La funzione generatrice dei momenti di una variabile di Poisson di parametro $\lambda$ è

$$\Phi_X(t) := E\left[e^{tX}\right] = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

e inoltre $E[X] = \lambda = Var(X)$.

ii)

$$P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

iii) La variabile $X + Y$ ha distribuzione di Poisson di parametro $3\lambda$

iv)

$$P(X+Y > 2) = 1-P(X+Y = 0)-P(X+Y = 1)-P(X+Y = 2) = 1-e^{-3\lambda}\left(1+3\lambda+\frac{9\lambda^2}{2}\right)$$

Nome:________________________________________

**Esercizio 4.**

Si considerino due variabili aleatorie $X$ e $Y$ con distribuzione congiunta data dalle seguente densità di probabilità

$$f(x,y) = ay\mathbb{1}_{\{x\in[0,1],\, y\in[0,1],\, x\le y\}}$$

1. Determinare il valore della costante $a$.
2. Calcolare le due densità marginali e i due valori medi $EX$ e $EY$.
3. Determinare se le variabili $X$ ed $Y$ sono indipendenti.
4. Determinare la covarianza $Cov(X,Y)$.

**Soluzione**

Tenendo conto delle restrizioni imposte dalla funzione caratteristica dobbiamo porre

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, ay\mathbb{1}_{\{x\le y\}} = a\int_0^1 dy\, y \int_0^y dx = 1$$

da cui $a = 3$. Integrando la densità $f(x,y)$ in $y$ otteniamo la densità marginale $f_X$, non nulla per $x \in [0,1]$, che vale

$$f_X(x) = 3\int_x^1 ydy = \frac{3}{2}(1-x^2)$$

e integrando in $x$ otteniamo la densità marginale $f_Y$, non nulla per $y \in [0,1]$, che vale

$$f_Y(y) = 3y\int_0^y dx = 3y^2.$$

Le variabili aleatorie $X$ ed $Y$ non sono indipendenti. Per i valori medi otteniamo:

$$EX = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{3}{8}$$

$$EY = 3\int_0^1 y^3 dy = \frac{3}{4}$$

$$E(XY) = 3\int_0^1 dy \int_0^1 dx xy^2\mathbb{1}_{\{x\le y\}} = 3\int_0^1 \frac{y^4}{2}dy = \frac{3}{10}.$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EX\, EY = \frac{3}{10} - \frac{9}{32} = \frac{3}{160}$$

Nome:________________________________________

**Esercizio 5.**

Determinare la stima di massima verosimiglianza per $\mu$ e $\sigma$ per una popolazione normale (o gaussiana) dai seguenti dati:

$$3, 2, 3, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 3, 2, 2$$

**Soluzione**

Lo stimatore di massima verosimiglianza per la media è la media campionaria $\bar{X}$ e per la varianza $\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$ da cui otteniamo le stime 3 e $\sqrt{\frac{10}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ rispettivamente per $\mu$ e $\sigma$.

Nome:________________________________________

**Esercizio 6.**

Supponendo di sapere che la varianza del campione normale riportato nell'esercizio 5 sia unitaria, determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la media $\mu$.
Si ricordi $z_{0,05} \simeq 1.645$ e $z_{0.025} \simeq 1.96$.

**Soluzione**

Un intervallo di confidenza al 95% per la media di una distribuzione normale con varianza nota è dato da

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

e dunque nel nostro caso

$$\left(3 - 1.96\frac{1}{\sqrt{12}}, 3 + 1.96\frac{1}{\sqrt{12}}\right).$$