Probabilità e Statistica

DOCENTE: Prof. Elisabetta Scoppola

FOGLIO DI ESERCIZI 1

TA: Matteo Quattropani
matteo.quattropani@uniroma3.it;

7 novembre 2017

---

1. Spazio campionario, eventi, probabilità

Esercizio 1.1. Siano A e B due eventi. Sapendo che $\mathbb{P}(A) = 3/5$, $\mathbb{P}(B) = 3/10$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/10$. Scrivere formalmente[1] e quindi calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(1) A o B si verificano.
(2) Uno ed un solo evento tra A e B si verifica.
(3) Al massimo un evento tra A e B si verifica.
(4) Né A né B si verifica.

Soluzione.

$$\mathbb{P}(\{A \text{ o } B \text{ si verificano}\}) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
$$\mathbb{P}(\{\text{Uno ed un solo evento tra } A \text{ e } B \text{ si verifica}\}) = \mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(\{\text{Al massimo un evento tra } A \text{ e } B \text{ si verifica.}\}) = \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cap B)) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B).$$
$$\mathbb{P}(\{\text{Né } A \text{ né } B \text{ si verifica}\}) = \mathbb{P}(\Omega \setminus (A \cup B)) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)).$$

Esercizio 1.2. Immagina di lanciare due dadi, uno rosso ed uno blu. Considera gli eventi

$$A = \{\text{Il dado blu dà un numero pari}\}$$
$$B = \{\text{Il dado rosso dà un numero pari}\}$$
$$C = \{\text{La somma dei risultati dei due dadi dà un numero pari}\}$$

e calcola:

(1) $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$.
(2) $\mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(B \cap C), \mathbb{P}(A \cap C)$.
(3) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Soluzione.

(1) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.
(2) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
(3) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$.

Esercizio 1.3. Qual è la probabilità che in una classe di n persone (ignorando gli anni bisestili):

(1) Nessuno compia gli anni oggi.
(2) Almeno una persona compia gli anni oggi.
(3) Nessuno compia gli anni nello stesso di giorno di nessun'altro.
(4) Esistano almeno due persone che compiano gli anni nello stesso giorno.

Soluzione.

(1) $\left(1 - \frac{1}{365}\right)^n$.
(2) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{n-k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n$.
(3) $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{364-(n-1)}{365} = \frac{364!}{365^{n-1}(365-n)!}$.

---

[1] I.e. in termini insiemistici.

(4) $1 - \frac{364!}{365^{n-1}(365-n)!}$.

Esercizio 1.4. Immagina di avere un mazzo con n chiavi diverse di cui una sola apre la porta che davanti. Le chiavi sono tra loro indistinguibili.

(1) Qual è la probabilità di riuscire ad aprire la porta al k-esimo tentativo, assumendo di non poter ricordare le chiavi che sono già state provate?
(2) Qual è la probabilità se assumiamo invece che le chiavi già provate vengano rimosse dal mazzo?

Soluzione.

(1) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$.
(2) $\frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$

Esercizio 1.5. Il problema del Cavalier Dé Meré. È maggiore la probabilità di vincere scommettendo che esca almeno un 6 su 4 tiri consecutivi, lanciando un dado alla volta, oppure scommettendo che escano almeno due 6 su 24 tiri, lanciando due dadi alla volta?

Soluzione (SBAGLIATA!) La probabilità di avere un 6 è $1/6$. Effettuando 4 lanci, la probabilità di avere un 6 è quindi $4 \times 1/6 = 2/3$. Se si lanciano due dadi la probabilità di fare un doppio 6 ad ogni lancio è uguale a $1/36$. Su 24 lanci, la probabilità diventa $24 \times 1/36 = 2/3$. Secondo l'argomento del Cavalier Dé Meré, se lancio 12 volte un dado, la probabilità di avere un 6 è pari a 2! :)

Soluzione (CORRETTA).

$\mathbb{P}(\text{perdere al primo gioco}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \Longrightarrow \mathbb{P}(\text{vincere al primo gioco}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.51$.
$\mathbb{P}(\text{perdere al secondo gioco}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \Longrightarrow \mathbb{P}(\text{vincere al secondo gioco}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49$

2. Probabilità condizionate ed indipendenza

Esercizio 2.1. Si lanci una moneta equa 3 volte

(1) Qual è la probabilità di avere 3 teste?
(2) Qual è la probabilità di avere una ed una sola testa?
(3) Sapendo che almeno uno dei tre lanci è stato testa, qual è la probabilità che almeno due siano testa?

Soluzione.

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.
(2) $3\left(\frac{1}{2}\right)^3$.
(3) Sia $A = \{\text{almeno 2 teste}\}$ e $B = \{\text{almeno 1 testa}\}$. Notiamo che $A \subset B$, e quindi $A \cap B = A$. Dalla formula per la probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A questo punto è sufficiente calcolare

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{2 teste}) + \mathbb{P}(\text{3 teste}) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{1 testa}) + \mathbb{P}(A) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Dunque la risposta è $\frac{4}{7}$.

Esercizio 2.2. A Roma piove $1/3$ dei giorni. Quando piove, c'è traffico con probabilità $1/2$. Quando non piove, invece, c'è traffico con probabilità $1/4$. Se piove e c'è traffico, arrivo tardi a lavoro con probabilità $1/2$. Se invece non piove e non c'è traffico, la probabilità che arrivi tardi a lavoro è $1/8$. Nelle altre situazioni, la probabilità che arrivi tardi a lavoro è $1/4$. Dato un giorno a caso,

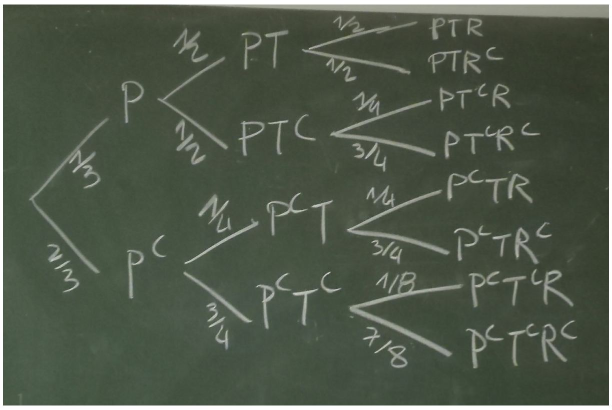
(1) Qual è la probabilità che non piova, ci sia traffico ed io non arrivi in ritardo?
(2) Qual è la probabilità che arrivi in ritardo?

(3) Sapendo che sono arrivato tardi, qual è la probabilità che abbia piovuto?

Soluzione. Siano

$$P = \{\text{Piove}\}$$
$$T = \{\text{C'è traffico}\}$$
$$R = \{\text{Arrivo in ritardo}\}.$$

Riassumendo i nostri dati nel seguente diagramma ad albero abbiamo



Allora

(1) $\mathbb{P}(P^c \cap T \cap R^c) = \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$.

(2) $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(P \cap T \cap R) + \mathbb{P}(P \cap T^c \cap R) + \mathbb{P}(P^c \cap T \cap R) + \mathbb{P}(P^c \cap T^c \cap R) = \frac{11}{48}$.

(3) $\mathbb{P}(P|R) = \frac{\mathbb{P}(R\cap P)}{\mathbb{P}(R)}$ Sappiamo già il valore del denominatore. Per quanto riguarda il numeratore abbiamo

$$\mathbb{P}(R \cap P) = \mathbb{P}(R \cap P \cap T) + \mathbb{P}(R \cap P \cap T^c) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

In conclusione

$$\mathbb{P}(P|R) = \frac{6}{11}.$$

Esercizio 2.3. Una scatola contiene tre monete, due eque ed una falsa, con testa su ambo le facce. Prendi una moneta a caso nella scatola e lanciala.

(1) Qual è la probabilità che esca testa?

(2) Sapendo che è uscita testa, qual è la probabilità che hai pescato la moneta falsa?

Soluzione.

$$T = \{\text{Esce testa}\}$$
$$E = \{\text{Scelgo la moneta equa}\}$$
$$E^c = \{\text{Scelgo la moneta con due teste}\}$$
$$\mathbb{P}(E) = \frac{2}{3},\ \ \mathbb{P}(E^c) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(T|E) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(T|E^c) = 1$$

Per la legge delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(T|E^c)\mathbb{P}(E^c) = \frac{2}{3}.$$

Per Bayes
$$\mathbb{P}(E^c|T) = \frac{\mathbb{P}(T|E^c)\mathbb{P}(E^c)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.4. Prendiamo una moneta iniqua, ovvero $\mathbb{P}(\text{Testa}) = p$. Giochiamo il seguente gioco: la moneta vieni lanciata ripetutamente finché non esce per due volte consecutive testa oppure esce due volte consecutive croce. Nel primo caso si vince, altrimenti si perde. Qual è la probabilità di vincere?
Soluzione. Consideriamo il sottoinsieme $V \subset \Omega$ degli eventi semplici che danno luogo alla vittoria. Queste sono tutte le possibili stringhe finite che non contengono due lettere uguali fino alla fine, e che si conconcludono con due T, i.e.
$$TT, CTT, TCTT, CTCTT, TCTCTT, CTCTCTT, \dots$$
Posso dividere l'insieme V negli insiemi V_1 e V_2, disgiunti, dove
$$V_1 = \{v \in V \mid v \text{inizia per T}\}$$
$$V_2 = \{v \in V \mid v \text{inizia per C}\}$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V) =& \mathbb{P}(V_1) + \mathbb{P}(V_2) \\
=& p^2 + p^3q + p^4q^2 + \cdots + p^2q + p^3q^2 + \dots \\
=& p^2(1 + pq + p^2q^2 + p^3q^3 + \dots) + p^2q(1 + pq + p^2q^2 + p^3q^3 + \dots) \\
=& p^2(1+q)\left(\sum_{i=0}^{\infty}(pq)^i\right) \\
=& p^2(1+q)\frac{1}{1-pq}
\end{aligned}$$
sostituendo $q = 1 - p$
$$\mathbb{P}(V) = \frac{p^2(2-p)}{1-p+p^2}.$$

Esercizio 2.5. Si consideri una famiglia che ha due figli. Supponiamo che la probabilità che nasca un maschio sia 1/2.

(1) Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?
(2) Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi, sapendo che il primo genito è maschio?
(3) Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi, sapendo che almeno uno dei due è maschio?
(4) Chiediamo ora al padre di scegliere uno dei due figli a caso e di dirci il genere. Se il padre ci risponde "Maschio!", qual è la probabilità che siano entrambi maschi?
(5) Supponiamo che i genitori abbiano scelto il nome dei figli maschi uniformemente a caso tra i nomi propri maschili italiani, e che questi siano n. Sapendo che un figlio è maschio e si chiama Alberto, qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

Soluzione.

(1) Sia $\Omega = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}$. Sia $\mathbb{P}$ la misura di probabilità t.c. $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$, $\forall \omega \in \Omega$. Allora
$$\mathbb{P}(MM) = \frac{1}{4}$$
.

(2)
$$\mathbb{P}(MM|MM \cup MF) = \frac{\mathbb{P}[MM \cap (MM \cup MF)]}{\mathbb{P}(MM \cup MF)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(3)
$$\mathbb{P}(MM|MF \cup FM \cup MM) = \frac{\mathbb{P}(MM)}{\mathbb{P}(MF \cup FM \cup MM)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

(4) Sia
$$M_r = \{\text{Il padre sceglie un figlio maschio.}\}$$
Allora
$$\mathbb{P}(M_r|FF) = 0$$
$$\mathbb{P}(M_r|MM) = 1$$
$$\mathbb{P}(M_r|MF) = \mathbb{P}(M_r|FM) = \frac{1}{2}.$$
Per la formula delle probabilità totali
$$\mathbb{P}(M_r) = \mathbb{P}(M_r|FF)\mathbb{P}(FF)+\mathbb{P}(M_r|MM)\mathbb{P}(MM)+\mathbb{P}(M_r|FM)\mathbb{P}(FM)+\mathbb{P}(M_r|MF)\mathbb{P}(MF) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
Per Bayes
$$\mathbb{P}(MM|M_r) = \frac{\mathbb{P}(M_r|MM)\mathbb{P}(MM)}{\mathbb{P}(M_r)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(5) Sia ora Ω come rappresentato in figura

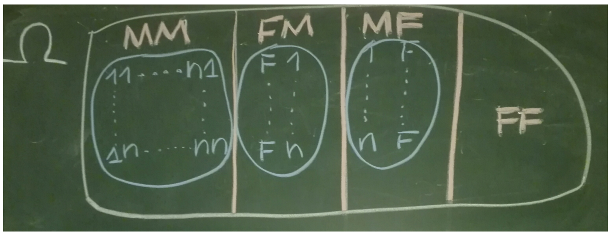


FIGURA 1. I quattro eventi in rosso sono equiprobabili. L'evento MM può essere scomposto in n^2 sottoeventi equiprobabili. Analogamente, sia l'insieme FM che MF, possono essere divisi in n sottoeventi ciascuno, tutti equiprobabili.

$$A = \{\text{Uno dei figli è maschio e si chiama Alberto}\} = 11 \cup 12 \cup \cdots \cup 1n \cup 21 \cup 31 \cup \ldots n1 \cup F1 \cup 1F$$
$$\mathbb{P}(MM|A) = \frac{\mathbb{P}(MM \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(11 \cup 12 \cup \cdots \cup 1n \cup 21 \cup 31 \cup \ldots n1)}{\mathbb{P}(A)}$$
dove
$$P(A) = \frac{1}{4}\frac{2n-1}{n^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n} + \frac{1}{4}\frac{1}{n} = \frac{4n-1}{4n^2}$$
mentre
$$\mathbb{P}(11 \cup 12 \cup \cdots \cup 1n \cup 21 \cup 31 \cup \ldots n1) = \frac{1}{4}\frac{2n-1}{n^2} = \frac{2n-1}{4n^2}$$
e dunque
$$\mathbb{P}(MM|A) = \frac{2n-1}{4n^2} \cdot \frac{4n^2}{4n-1} = \frac{2n-1}{4n-1}.$$

Esercizio 2.6. Per testare una nuova macchina, la Fiat seleziona 3 dipendenti a cui lasciare guidare la macchina per un anno. Sapendo che i volontari sono 12 uomini ed 8 donne, e che la fiat selezionerà i tre fortunati uniformemente a caso,

(1) Qual è la probabilità che il terzo selezionato sia una donna, sapendo che gli altri due sono uomini?

(2) Qual è la probabilità che il terzo selezionato sia una donna, sapendo che i primi due selezionati sono un uomo ed una donna?

Soluzione. Siano

$$D = \{\text{Il terzo è donna}\}$$
$$U = \{\text{Il primo e il secondo sono uomini}\}$$
$$\mathbb{P}(U) = \frac{12}{20}\frac{11}{19}$$
$$\mathbb{P}(D \cap U) = \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(D|U) = \frac{8}{18}.$$

Analogamente

$$M = \{\text{I primo due sono un uomo e una donna, indipendentemente dall' ordine}\}$$
$$\mathbb{P}(D|M) = \frac{7}{18}$$

Esercizio 2.7. La Fiat produce le sue macchine in 3 stabilimenti. Il 37% delle macchine sono prodotte nello stabilimento A, il 20% nello stabilimento B e le restanti nello stabilimento C. Sapendo che le macchine prodotte in A sono difettose nel 5% dei casi, mentre lo sono al 3% e al 4% se sono prodotte rispettivamente nello stabilimento B e C. Selezioniamo una macchina Fiat uniformemente a caso

(1) Qual è la probabilità che non sia difettosa?
(2) Qual è la probabilità che non sia difettosa sapendo che è stata prodotta nello stabilimento B?
(3) Qual è la probabilità che sia stata prodotta nello stabilimento B sapendo che la macchina è difettosa?

Soluzione. Siano

$$D = \{\text{La macchina è difettosa}\}$$
$$A = \{\text{La macchina è stata prodotta nello stabilimento A}\}$$
$$B = \{\text{La macchina è stata prodotta nello stabilimento A}\}$$
$$C = \{\text{La macchina è stata prodotta nello stabilimento A}\}$$

e noi sappiamo che

$$\mathbb{P}(A) = \frac{37}{100}$$
$$\mathbb{P}(A) = \frac{20}{100}$$
$$\mathbb{P}(A) = \frac{43}{100}$$
$$\mathbb{P}(D|A) = \frac{5}{100}$$
$$\mathbb{P}(D|B) = \frac{3}{100}$$
$$\mathbb{P}(D|C) = \frac{4}{100}$$

(1) Basta usare la formula delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C),$$

e

$$\mathbb{P}(D^c) = 1 - \mathbb{P}(D).$$

(2) Basta passare al complementare condizionatemente a B

$$\mathbb{P}(D^c|B) = 1 - \mathbb{P}(D|B) = \frac{97}{100}.$$

(3) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(B|D) = \frac{\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(D)}.$$

Esercizio 2.8. Supponiamo che il test per l'HIV abbia un tasso di falsi positivi (risulti malato ma in realtà non lo sei) del 5%, mentre sono impossibili i falsi negativi (se hai l'HIV il test lo rileva con certezza). Supponendo inoltre che presa una persona a caso in Italia, la probabilità che questa abbia l'HIV sia di 10000^{-1}. Hai appena fatto il test, e sei risultato positivo. Devi preoccuparti? Ovvero, qual è la probabilità che tu abbia l'HIV?
Soluzione

$$H = \{\text{Hai l'HIV}\}$$
$$P = \{\text{Risulti positivo}\}$$

Noi sappiamo che

$$\mathbb{P}(H) = 1/10000$$
$$\mathbb{P}(P|H^c) = 5/100$$
$$\mathbb{P}(P|H) = 1$$

Per bayes

$$\mathbb{P}(H|P) = \frac{\mathbb{P}(P|H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(P)}$$

Per la formula delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(P|H^c)\mathbb{P}(H^c) = \frac{1}{10000} + \frac{5}{100}\frac{9999}{10000} \approx \frac{5}{100}$$

e dunque

$$\mathbb{P}(H|P) \approx \frac{1}{10000}\frac{100}{5} = \frac{1}{500}$$

Esercizio 2.9. Un'azienda ha due progetti, A e B. La probabilità che il progetto A vada a buon fine è $\frac{2}{3}$, mentre è $\frac{4}{5}$ per il progetto B. Supponendo che A e B siano indipendenti, qual è la probabilità che entrambi i progetti falliscano?
Soluzione. Utilizzando il fatto che A e B sono indipendenti, abbiamo

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{3}\frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Esercizio 2.10. (Da `https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Monty_Hall`) Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere fra tre porte: dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre. Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra. Quindi ti domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?" Ti conviene cambiare la tua scelta originale?
Soluzione. Immaginiamo di giocare come segue. Invece di scegliere una sola porta ne scegliamo due. La probabilità di avere l'automobile dietro ad una delle due porte scelte è $\frac{2}{3}$. Quando il conduttore ci chiede la nostra scelta noi dichiareremo l'unica delle porte che non abbiamo selezionato. Se sapessimo che l'automobile si trova dietro uno delle due porte selezionate allora con questa strategia vinceremmo con probabilità 1. Siano

$$V = \{\text{Vinco utilizzando questa strategia}\}$$

$$A = \{\text{L'auto si trova dietro una delle due porte selezionate}\}$$

Allora, in formula

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{P}(V|A) = 1$$

e per la formula delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V|A^c)\mathbb{P}(A^c) = \frac{2}{3}.$$