Probabilità e Statistica

DOCENTE: Prof. Elisabetta Scoppola

FOGLIO DI ESERCIZI 3

TA: Matteo Quattropani
matteo.quattropani@uniroma3.it;

20 novembre 2017

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Esercizio 5.1 Affermare che una variabile aleatoria $X : \Omega \to [-1,1]$ ha densità $f(x) := cx^2$ significa affermare che

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall [a,b] \subset [-1,1],$$

ed in particolare

$$\mathbb{P}(X \in [-1,1]) = 1.$$

(1) Quanto vale c?
(2) Quanto vale $\mathbb{E}[X]$? E $Var[X]$?
(3) Qual è la probabilità che $X \geq \frac{1}{2}$?

Soluzione.

(1)

$$1 = \int_{-1}^1 cx^2dx = \frac{2}{3}c \Longrightarrow c = \frac{3}{2}.$$

(2)

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 x^3dx = 0.$$

$$Var(X) = E[X^2] = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 x^4dx = \frac{3}{5}.$$

(3)

$$\mathbb{P}(X \geq 1/2) = \frac{3}{2}\int_{1/2}^1 x^2dx = \frac{7}{16}.$$

Esercizio 5.2 Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con densità di probabilità $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ della forma $f(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}$. Se $Y = X^2$, qual è la distrubuzione di probabilità di Y? In altre parole cerchiamo una funzione $F_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$, t.c. $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& \mathbb{P}(Y \le y) \\ =& \mathbb{P}(X^2 \le y) \\ =& \mathbb{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\ =& \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ =& 2\int_{0}^{+\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-x} dx \\ =& 1 - e^{-\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}} & \text{se } y \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 5.3 Sia $X : \Omega \to (0,1]$ con densità di probabilità $f : (0,1] \in \mathbb{R}^+$ della forma $f(x) = 4x^3$. Qual è la probabilità che $X \le \frac{2}{3}$, sapendo che $X > \frac{1}{3}$?
Soluzione.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \le 2/3 | X > 1/3) =& \frac{\mathbb{P}(1/3 < X \le 2/3)}{\mathbb{P}(X > 1/3)} \\ =& \frac{\int_{1/3}^{2/3} x^3 dx}{\int_{1/3}^{1} x^3 dx} \\ =& \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Esercizio 5.4 Trovare la distribuzione di una v.a. continua $X : \Omega \in \mathbb{R}^+$, t.c. le sue probabilità condizionate godano della proprietà

$$\mathbb{P}(X > x + y | X > y) = \mathbb{P}(X > x).$$

Soluzione. Chiamiamo $p(x) := \mathbb{P}(X > x)$. Allora

$$\begin{aligned} p(x) =& \mathbb{P}(X > x) \\ =& \mathbb{P}(X > x + y | X > y) \\ =& \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > y)} \\ =& \frac{p(x + y)}{p(x)} \end{aligned}$$

ovvero

$$p(x + y) = p(x)p(y)$$

ne segue che $p(x)$ deve essere della forma $e^{-\lambda x}$ per qualche $\lambda > 0$.
Esercizio 5.5 Sto vendendo casa, ed ho deciso che accetterò la prima offerta eccedente K euro. Supponiamo che le offerte siano indipendenti, che ogni offerta che ricevo è distribuita come una variabile aleatoria continua, e che tutte le offerte abbiano la stessa distribuzione. Sia $N - 1$ la v.a. discreta che rappresenta il numero di offerte che ho rifiutato prima di accettare. Qual è la legge di N?
Soluzione. Sia F la funzione di ripartizione della v.a. che rappresenta ciascuna delle offerte, allora

$$\mathbb{P}(N = n) = F(K)^{n-1}[1 - F(K)]$$

e quindi $N \sim \mathcal{G}eom(1 - F(K))$.
Esercizio 5.6 Sia $U \sim Unif([0,1])$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Qual è la distribuzione di $X = \lfloor nU \rfloor + 1$?
Soluzione. Per ogni $i = \{1, \dots, n\}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = i) =& \mathbb{P}(\lfloor nU \rfloor + 1 = i)\\ =& \mathbb{P}(\lfloor Un \rfloor = i - 1)\\ =& \mathbb{P}\left(U \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)\right)\\ =& \frac{i}{n}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.7 Sia X v.a. assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := 3x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Si consideri la v.a. $A := -\log(X)$.

(1) Si calcoli la funzione di ripartizione della variabile aleatoria A e se ne identifichi la distribuzione.
(2) Consideriamo il seguente polinomio nella variabile x con coefficienti aleatori determinati dalla variabile A:

$$x^2 + 3Ax + 2A^2 + 4 = 0.$$

Qual è la probabilità che il polinomio non ammetta radici reali?

Soluzione.

(1) Iniziamo col calcolare la ripartizione di X. Se $x \in [0,1]$ abbiamo

$$\begin{aligned}F_X(x) =& \int_0^x 3u^2 du\\ =& x^3.\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}F_A(a) =& \mathbb{P}(A \leq a)\\ =& \mathbb{P}(-\log(X) \leq a)\\ =& \mathbb{P}(\log(1/X) \leq a)\\ =& \mathbb{P}(1/X \leq e^a)\\ =& \mathbb{P}(X \geq e^{-a})\\ =& 1 - \mathbb{P}(X \leq e^{-a})\\ =& 1 - e^{-3a}\mathbf{1}_{[0,1]}(e^{-a})\\ =& 1 - e^{-3a}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(a)\end{aligned}$$

ovvero $A \sim \mathcal{E}xp(3)$.

(2) Il discriminante dell'eq. di secondo grado è dato da

$$\Delta = 9A^2 - 4(2A^2 + a) = A^2 - 16$$

dunque $\Delta \geq 0 \iff |A| \geq 4$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq 4) =& 1 - \mathbb{P}(X \in (-4,4))\\ =& 1 - 3\int_0^4 e^{-3u} du\\ =& e^{-12}.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathbb{P}(\text{Non ci sono soluzioni reali}) = 1 - e^{-12}.$$

Leggi congiunte

Esercizio 6.1 Trova la densità di probabilità congiunta delle due v.a. X e Y la cui distribuzione congiunta è data da

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}) & \text{se } x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X e Y sono indipendenti?

Soluzione. Calcoliamo la densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} F_{X,Y}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)} = (2xe^{-x^2})(2ye^{-y^2}).$$

Notiamo inoltre che il range in cui la marginale X può assumere valori non dipende da Y, e viceversa. Quindi X e Y sono indipendenti.

Esercizio 6.2 Siano X, Y, Z v.a. t.c.

$$X : \Omega \to \{1,2\},$$
$$Y : \Omega \to \{1,2,3\},$$
$$Z : \Omega \to \{1,2\},$$

Trova il valore di $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{\mathcal{Z}} xyz$$

possa essere la loro densità congiunta. Inoltre, calcola

(1) $\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 2, Z = 1)$.
(2) $\mathbb{P}(X = 2, Y + Z = 4)$.
(3) La densità marginale di (X, Y) e la densità marginale di X.

Soluzione. Cominciamo con il calcolare il valore della costante $\mathcal{Z}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} \sum_{z=1}^{2} xyz =& \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} 3xy \\ =& \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{x=1}^{2} 18x \\ =& \frac{54}{\mathcal{Z}} \end{aligned}$$

dunque $\mathcal{Z} = 54$.

(1) $\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 2, Z = 1) = f(1,1,1) + f(1,2,1) = \frac{3}{54}$.
(2) $\mathbb{P}(X = 2, Y + Z = 4) = f(2,2,2) + f(2,3,1) = \frac{14}{54}$.
(3) $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{z=1}^{2} \frac{1}{54} xyz = \frac{3}{54} xy$.
$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y=1}^{3} \frac{3}{54} xy = \frac{1}{3} x$.

Esercizio 6.3 Date tre v.a. X, Y, Z con densità congiunta

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x + 3y + z) & \text{se } 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \wedge 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{P}(X=\frac{1}{2},Y=\frac{1}{2},Z=\frac{1}{2})$ e $\mathbb{P}(X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2},Z<\frac{1}{2})$.
Soluzione. Banalmente,

$$\mathbb{P}(X=\frac{1}{2},Y=\frac{1}{2},Z=\frac{1}{2})=0$$

mentre

$$\mathbb{P}(X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2},Z<\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}\frac{1}{3}(2x+3y+z)=\frac{1}{4}.$$

Esercizio 6.4

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}24xy & \text{se } 0<x<1\wedge 0<y<1\wedge x+y<1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Trova la densità marginale di Y e la densità condizionata di X dato $Y=\frac{1}{2}$.
Soluzione. Iniziamo col notare che la superfice descritta da $0<x<1\wedge 0<y<1\wedge x+y<1$ non è altro che il triangolo delimitato dagli assi e dalla retta di equazione $x=1-y$. Pertanto

$$f_Y(y)=\int_0^{1-y}24xydx=12y(1-y)^2.$$

Notiamo ora che se si verifica l'evento $Y=1/2$, allora sicuramente si verificherà anche l'evento $X<1/2$. Per definizione di densità condizionata

$$f_{X|Y=1/2}(x)=\frac{f_{X,Y}(x,1/2)}{f_Y(1/2)}=\frac{12x}{3/2}=8x,\ \ \forall x<1/2.$$

Teoremi limite e stime di concentrazione

Esercizio 7.1 Molti ritengono che la variazione diaria del valore di un'azione in borsa si distribuisca come una variabile aleatoria di media 0 e varianza σ^2. Cioè, se Y_n rappresenta il valore dell'azione nel giorno n-esimo, allora

$$Y_n=Y_{n-1}+X_n,\ \ \forall n\geq 1$$

dove $X_1,X_3,\dots$ sono v.a.i.i.d. di media 0 e varianza σ^2. Supponiamo che il prezzo dell'azione oggi sia 100 euro. Se $\sigma^2=1$, cosa possiamo dire riguardo alla probabilità che il prezzo dell'azione superi 105 euro dopo 10 giorni?
Soluzione. Sia $W=\sum_{i=1}^{365}X_i$. Il nostro problema è determinare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{365}>105)=&\mathbb{P}(W>5)\\ =&\mathbb{P}\left(\frac{W}{\sqrt{365}}>\frac{5}{\sqrt{365}}\right)\\ \approx&\mathbb{P}(Z>\frac{5}{\sqrt{365}})\\ \approx&0.4791,\end{aligned}$$

dove $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.
Esercizio 7.2 Un certo componente è fondamentale per il funzionamento di un dato apparecchio e quando si guasta viene immediatamente rimpiazzato con uno nuovo. Se il tempo medio di vita di uno di questi componenti è pari a 100 ore, con deviazione standard di 30 ore, quanti componenti dobbiamo immagazzinare affinché la probabilità che il sistema sia sempre funzionante per le prossime 2000 ore sia almeno pari a 0.95?
Soluzione. Sia n il numero di componenti necessari e X_i la variabile aleatoria che rappresenta la vita (in ore) del componente i-esimo. Allora, per il teorema del limite centrale

$$p:=\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i\geq 2000)\approx\mathbb{P}(Z>\frac{2000-100n}{30\sqrt{n}}).$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Poichè $\mathbb{P}(Z > -1.64) = 0.95$

$$p > 0.95 \iff \frac{2000 - 100n}{30\sqrt{n}} > -1.64$$

e risolvendo la disequazione in n otteniamo $n > 23$.

Esercizio 7.3 Un lago contiene 4 differenti tipi di pesci. Supponiamo che ogni pesce pescato possa essere di uno di questi 4 tipi con uguale probabilità. Denotiamo con Y il numero di pesci che dobbiamo catturare per ottenere almeno uno di ogni tipo.

(1) Si determini un intervallo $[a,b]$ t.c. $\mathbb{P}(Y \in [a,b]) \geq 0.9$.

Soluzione. Sia Y la v.a. che conta il numero di pesci pescati fino al momento in cui ne abbiamo uno di ciascuna specie. Sia Y_i il numero di pesci da pescare, dal momento in cui ho già pescato i specie diverse, prima che ne peschi uno di una specie diversa.

(1) Questo è come l'esercizio del collezionista di figurine:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{3} Y_i] = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{E}[Y_i] = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{2} + 4 = \frac{75}{9}.$$

Analogamente

$$Var[X] = Var[\sum_{i=0}^{3} Y_i] = \sum_{i=0}^{3} Var[Y_i] = \frac{4}{9} + 2 + 12 = \frac{130}{9}.$$

Utilizzando Chebyshev

$$\mathbb{P}\left(\left| Y - \frac{75}{9} > \sqrt{\frac{130}{9} \cdot 10} \right|\right) \leq \frac{1}{10}$$

e quindi

$$[a,b] = \left[\frac{25}{3} - \sqrt{\frac{1300}{9}}, \frac{25}{3} + \sqrt{\frac{1300}{9}}\right].$$

Quindi, in realtà,

$$[a,b] = \left[4, \frac{25 + \sqrt{1300}}{3}\right].$$