Probabilità e Statistica

DOCENTE: Prof. Elisabetta Scoppola

FOGLIO DI ESERCIZI 4

TA: Matteo Quattropani
matteo.quattropani@uniroma3.it;

4 dicembre 2017

VARIABILI ALEATORIE BERNULLIANE, BINOMIALI E SIMILI

Esercizio 8.1 Si consideri una successione di prove indipendenti di Bernoulli, ognuna delle quali sia un successo con probabilità pari a p. Sia X_1 il numero aleatorio di insuccessi che precedono il primo successo e sia X_2 il numero aleatorio di insuccessi tra il primo e il secondo successo. Si determini la densità congiunta di X_1 e X_2.
Soluzione. Chiaramente X_1 ed X_2 hanno la stessa legge. Sia $q = 1 - p$, allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0) =& p \\
\mathbb{P}(X_1 = 1) =& pq \\
\mathbb{P}(X_1 = 2) =& pq^2 \\
&\vdots \\
\mathbb{P}(X_1 = k) =& q^k p, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Tale legge prende il nome di $Geom(q)$.
Poiché X_1 e X_2 sono indipendenti

$$\mathbb{P}(X_i = k, X_2 = j) = q^k p q^j p = p^2 q^{j+k}, \qquad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 8.2* Siano $X \sim Bern(p)$ ed $Y \sim Bern(q)$ variabili di Bernoulli con $0 \leq p \leq q \leq 1$. Trova un vettore aleatorio $Z := (X, Y)$ con densità $p_Z(x, y) := \hat{\mathbb{P}}(X = x, Y = y)$ tale che Z sia l'accoppiamento ottimale di X e Y , cioè:

- le marginali di Z abbiano la stessa distribuzione di X ed Y ;
- $\hat{\mathbb{P}}(\{X \neq Y\})$ sia la minima possibile.

Soluzione. È semplice ma esce un po' dal programma del corso. Se sei interessato prova a risolverlo, se hai dubbi a riguardo scrivimi per email.
Esercizio 8.3 L'esame di Probabilità e Statistica è costituito da 30 domande a risposta chiusa. Quante devono essere le opzioni di ciascuna domanda affinchè la probabilità che uno studente superi l'esame rispondendo a caso sia minore di 0.2?
Soluzione. Sia k il numero di opzioni di ciascuna domanda e sia X_j la v.a. che vale 1 se lo studente indovina la domanda j, con $j \leq 30$. Allora $X_j \sim Bern(k^{-1})$, $\forall j \leq 30$. Sia $X = \sum_{j=1}^{30} X_j \sim Bin(30, k^{-1})$, allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 18) =& \sum_{i=18}^{30} \binom{30}{i} \frac{1}{k^i} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{30-i} \\
\leq& \binom{30}{18} \frac{1}{k^{18}}
\end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo utilizzato il seguente fatto:

$$\{X \geq 18\} = \{\exists i_1, \ldots, i_{18} \text{ t.c. } X_{i_1} = \cdots = X_{i_{18}} = 1\},$$

quindi

$$\mathbb{P}(X \geq 18) = \mathbb{P}(\cup_{(i_1,\dots,i_{18})\subset\{1,\dots 30\}}(X_{i_1} = 1 \cap \cdots \cap X_{i_{18}} = 1)) \leq \sum_{(i_1,\dots,i_{18})\subset\{1,\dots 30\}} \mathbb{P}(X_{i_1} = 1 \cap \cdots \cap X_{i_{18}} = 1) = \binom{30}{18} p^{18}$$

Per assicurarci che $\mathbb{P}(X \geq 18) \leq 0.2$ è quindi sufficiente avere

$$k \geq \left(5\binom{30}{18}\right)^{\frac{1}{18}} \approx 3.01.$$

Esercizio 8.4 In questa classe ci sono 100 studenti. Sia 0.05 la probabilità che una qualsiasi coppia (ordinata) sia tale che il primo studente della coppia sia un follower su twitter del secondo. Quanti follower ha in media ciascuno studente? Di quanta gente è follower in media ciascuno studente?
Soluzione. Questo esercizio è banale (e non ci sono conti da fare), pensa tu a quale potrebbe essere la soluzione...
Esercizio 8.5 Un antico proverbio recita

> People who have three daughters try for more,
> And then its fifty-fifty they'll have four,
> Those with a son or sons will let things be,
> Hence all these surplus women, QED.

Ti sembra che il proverbio abbia senso?
Soluzione. Interpretiamo il proverbio come segue:

> Ogni coppia si riproduce fino all'arrivo del primo figlio maschio, poi smette di riprodursi. Ogni figlio ha probabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio, indipendentemente dagli altri.

Allora

$$\Omega = \{M, F^2M, F^3M, \dots\}$$

e

$$\mathbb{P}(F^nM) = 2^{-(n+1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\#F] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(F^nM) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-(n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il seguente fatto, $\forall x \in (0,1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} nx^n =&x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}\\ =&x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(x^n)\\ =&x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ =&x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\\ =&x\frac{1}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

e scelto $x = 2^{-1}$.

Questo significa che se ogni coppia decidesse di riprodursi secondo la strategia indicata dal proverbio, in media, avremmo lo stesso numero di uomini e di donne. Quindi la tesi del proverbio è falsa, QED.

Esercizio 8.6 Siano X, Y i.i.d. $Bern(1/2)$. Detti $Z := X + Y$ e $U = |X - Y|$

(1) Z e U sono correlati?
(2) Z e U sono indipendenti?

Soluzione.

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z,U) =&\mathbb{E}[(X+Y)|X-Y] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[|X-Y|]\\ =&\mathbb{E}[X|X-Y|] + \mathbb{E}[Y|X-Y|] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[|X-Y|] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[|X-Y|]\\ =&\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\\ =&0\end{aligned}$$

quindi U e Z sono scorrelati.

(2) Se consideriamo gli eventi

$$E = \{X+Y=0\}, \qquad F = |X-Y| = 0$$

abbiamo

$$\mathbb{P}(E\cap F) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

quindi U e Z non sono indipendenti.

Esercizio 8.7 Siano $X_1 \sim Bern(p_1)$ e $X_2 \sim Bern(p_2)$ indipendenti.

(1) Quanto vale $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$?
(2) Quanto vale $\mathrm{Var}[X_1 + X_2]$?
(3) Fissato $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mu$ trovare p_1 e p_2 che massimizzino la varianza.

Soluzione.

(1) $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = p_1 + p_2$.
(2) $\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] = p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)$.
(3) Fissiamo $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mu$, $p_1 = p$ e quindi $p_2 = \mu - p$. Allora

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X_1+X_2] =&p(1-p) + (\mu-p)(1-(\mu-p))\\ =&p - p^2 + \mu - p - \mu^2 - p^2 + 2\mu p\\ =&-2p^2 + 2\mu p - \mu^2.\end{aligned}$$

Ovvero la varianza della somma è una parabola in p con concavità verso il basso. Il massimo è quindi ottenuto nel punto in cui si annulla la derivata. Calcoliamo quindi

$$\frac{d}{dp}\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = -4p + 2\mu$$

e quindi viene massimizzata per $p = \mu/2$, i.e. $p_1 = p_2$.

Esercizio 8.8 Siano $X, Y \sim Bin(n, p)$ indipendenti. Fissato $N \leq 2n$, calcolare la legge di X condizionatamente all'evento $X + Y = N$.

Soluzione. Detto $q := (1 - p)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k | X + Y = N) =& \frac{\mathbb{P}(X = k \cap X + Y = N)}{\mathbb{P}(X + Y = N)} \\
=& \frac{\mathbb{P}(X = k \cap Y = N - k)}{\mathbb{P}(X + Y = N)} \\
=& \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = N - k)}{\mathbb{P}(X + Y = N)} \\
=& \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n}{N-k} p^{N-k} q^{n-N+k}}{\binom{2n}{N} p^N q^{2n-N}} \\
=& \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{N-k}}{\binom{2n}{N}}
\end{aligned}$$

tale distribuzione prende il nome di Ipergeometrica di parametri $(2n, N, n)$.

Esercizio 8.9 In una classe di 50 persone il 30% degli studenti sono biondi.

(1) Qual è la probabilità che estrando 10 studenti a caso (con reinserimento) dalla classe, almeno quattro siano biondi?
(2) Qual è la probabilità che estrando 10 studenti a caso (senza reinserimento) dalla classe, almeno quattro siano biondi, se assumiamo che la classe è composta da 50 studenti?

Soluzione.

(1) Sia X il numero di biondi estratti. Allora $X \sim Bin(10, 0.3)$, quindi

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{4} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{10-k}.$$

(2) Sia Y il numero di biondi estratti, allora

$$\mathbb{P}(Y \geq 4) = \sum_{k=4}^{10} \frac{\binom{15}{k}\binom{35}{10-k}}{\binom{50}{10}},$$

i.e. $Y \sim HGeom(50, 10, 15)$.

Variabili aleatorie di Poisson

Esercizio 9.1 Il direttore di un impianto industriale deve acquistare una macchina di tipo A o di tipo B. Ogni giorno la macchina A ha bisogno di un numero di riparazioni giornaliere X, v.a. di Poisson di media 2. Il costo giornaliero della macchina A è dato da $C_A = 360 + 40X^2$. Analogamente, la macchina B ha bisogno di Y riparazioni giornaliere, con Y v.a. di Poisson di media 3, ed operare con la macchina B costa in un giorno $C_B = 128 + 40Y^2$. Assumiamo che il tempo necessario alla riparazione di una macchina sia molto breve, e che ogni notte le macchine vengano riparate, in modo tale che sia possibile assumere che ogni giorno la macchina

si comporti come se fosse nuova. Quale macchina è più conveniente?
Soluzione. Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_A] =& 360 + 40\mathbb{E}[X^2] \\
=& 360 + 40 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-2}2^k}{k!} \right) \\
=& 360 + 40 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1)+k) \frac{e^{-2}2^k}{k!} \right) \\
=& 360 + 40 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-2}2^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-2}2^k}{k!} \right) \\
=& 360 + 40 \left(\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-2}2^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-2}2^k}{k!} \right) \\
=& 360 + 40 \left(2^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-2}2^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-2}2^k}{k!} \right) \\
=& 360 + 40 \left(2^2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{e^{-2}2^h}{h!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-2}2^k}{k!} \right) \\
=& 360 + 40 \left(2^2 + 2 \right) \\
=& 600.
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
\mathbb{E}[C_B] = 128 + 40(3 + 9) = 608.
$$

Quindi è più conveniente la macchina A.
Esercizio 9.2 Il numero di chiamate che arrivano ad un centralino in un minuto è distribuito come una v.a. di Poisson di tasso 3.

(1) Qual è la probabilità che in un dato minuto non arrivino chiamate?
(2) Qual è la probabilità di ricevere almeno due chiamate nell'arco di 2 minuti, assumendo che il numero di chiamate che arrivano in un dato minuto sono indipendenti dal numero di quelle che arrivano nel minuto successivo?

Soluzione.

(1) $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-3}$.
(2) Sia X_1 il numero di chiamate ricevute nel primo minuto e X_2 il numero di chiamate ricevute nel secondo minuto. Chiaramente $X_1, X_2 \sim Poiss(3)$ ed inoltre sono indipendenti, quindi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq 2) =& 1 - \mathbb{P}(X_1 + X_2 < 2) \\
=& 1 - (\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) + 2\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)) \\
=& 1 - \left(\frac{e^{-3}3^0}{0!} \right) - 2 \left(\frac{e^{-3}3^0}{0!} \right) \left(\frac{e^{-3}3^1}{1!} \right) \\
=& 1 - 7e^{-6}. \\
\approx& 0.98.
\end{aligned}
$$

Esercizio 9.3 Hai in tasca un numero N di monete, dove $N \sim Poiss(\lambda)$. Lanci tutte le monete, ciascuna delle quali ha probabilità p (indipendentemente dalle altre) di risultare in una testa. Qual è la legge di X, v.a. che

conta il numero di teste ottenute?
Soluzione.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=x) &= \sum_{n=x}^{\infty} \mathbb{P}(X=x|N=n)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \sum_{n=x}^{\infty} \frac{1}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \lambda^x \lambda^{n-x} e^{-\lambda} e^{\lambda p} e^{-\lambda p} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-x} \lambda^{n-x} e^{-\lambda(1-p)}}{(n-x)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m e^{-\lambda(1-p)}}{m!} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!}
\end{aligned}
$$

ovvero, $X \sim Poiss(\lambda p)$.
Esercizio 9.4 Siano $X \sim Poiss(\lambda)$ e $Y \sim Poiss(\mu)$ indipendenti.

(1) Qual è la legge di $X+Y$?
(2) Condizionatamente all'evento $X+Y=n$, qual è la legge di X?

Soluzione.

-
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=n-k, Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=n-k,)\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}\mu^k \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda+\mu)^n
\end{aligned}
$$

  quindi $X+Y \sim Poiss(\lambda+\mu)$.

- $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=&\frac{\mathbb{P}(X=k\cap X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\=&\frac{\mathbb{P}(X=k\cap Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\=&\frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\=&\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\frac{e^{-\mu}\mu^{k}}{k!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n}\\=&\binom{n}{k}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}.\end{aligned}$$

Esercizio 9.5 Se X è una variabile di Poisson parametro λ, si mostri che

$$\mathbb{E}[X^n]=\lambda\mathbb{E}[(X+1)^{n-1}].$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\lambda\mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]=&\lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\\=&\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\\j=k+1\Rightarrow=&\sum_{j=0}^{\infty}j^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!}\\=&\mathbb{E}[X^n].\end{aligned}$$