Probabilità e Statistica

DOCENTE: Prof. Elisabetta Scoppola

FOGLIO DI ESERCIZI 5

TA: Matteo Quattropani
matteo.quattropani@uniroma3.it;

18 dicembre 2017

VARIABILI ALEATORIE ESPONENZIALI

Esercizio 9.1 Siano X, Y v.a.i.i.d $X \overset{d}{=} Y \sim Exp(\lambda)$. Come è distribuita la v.a. $Z = X+Y$? Come è distribuita $W = e^Z$?
Soluzione.

$$\begin{aligned} F_Z(z) =& \mathbb{P}(Z \leq z) \\ =& \mathbb{P}(X+Y \leq z) \\ =& \int_0^\infty \left(\int_0^{z-y} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \\ =& \int_0^\infty F_X(z-y) f_Y(y)dy \\ =& \int_0^z F_X(z-y) f_Y(y)dy \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} f_Z(z) =& \frac{d}{dz} F_Z(z) \\ =& \int_0^\infty f_X(z-y) f_Y(y)dy \\ =& \int_0^z f_X(z-y) f_Y(y)dy \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f_Z(z) =& \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda(z-y)} \mathbf{1}_{z-y>0} e^{-\lambda y} dy \\ =& \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dy \\ =& \lambda^2 e^{-\lambda z} z \end{aligned}$$

Poichè se $V \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ allora $f_V(v) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} v^{\alpha-1} e^{-\lambda v}$, deduciamo che $Z \sim \Gamma(2, \lambda)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W \leq w) =& \mathbb{P}(e^Z \leq w) \\ =& \mathbb{P}(Z \leq \log(w)) \\ =& \lambda^2 \int_0^{\log(w)} e^{-\lambda z} z dz \end{aligned}$$

integro per parti il prodotto $g'(z)f(z)$ dove $f(z) = z$ e $g(z) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}$, e quindi $g'(z) = e^{-\lambda z}$, ottenendo

$$\begin{aligned}\lambda^2 \int_0^{\log(w)} e^{-\lambda z} z dz =& - \lambda z e^{-\lambda z}|_0^{\log(w)} + \lambda \int_0^{\log(w)} e^{-\lambda z} dz\\ =& - \lambda \log(w) w^{-\lambda} - e^{-\lambda z}|_0^{\log(w)}\\ =& - \lambda \log(w) w^{-\lambda} - \left(w^{-\lambda} - 1\right)\\ =& 1 - w^{-\lambda}(1 + \lambda \log(w))\end{aligned}$$

Esercizio 9.2 Siano X e Y v.a.i.i.d. di legge esponenziale di parametro λ. Calcolare la probabilità dell'evento $\{Y > X\}$. Calcolare la probabilità dello stesso evento nel caso $X \sim Exp(\lambda_1)$, $X \sim Exp(\lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$?
Soluzione. Per ovvi motivi di simmetria, se i parametri coincidono la probabilità dell'evento in questione è 1/2. Per quanto riguarda il secondo punto

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > X) =& \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f_Y(y) dy \right) f_X(x) dx\\ =& \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-\lambda_2 y} dy \right) e^{-\lambda_1 x} dx\\ =& \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 y} \right)_x^\infty e^{-\lambda_2 x} dx\\ =& \lambda_1 \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} e^{-\lambda_1 x} dx\\ =& \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx\\ =& \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.\end{aligned}$$

Esercizio 9.3 Sia $U \sim Exp(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$. Determinare la distribuzione di $X := \sqrt[\alpha]{U}$.
Soluzione.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sqrt[\alpha]{U} \leq u) =& \mathbb{P}(U \leq u^\alpha)\\ =& 1 - e^{-\lambda u^\alpha}\end{aligned}$$

e duque

$$f_U(u) = \lambda e^{-\lambda u^\alpha} \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Tale distribuzione prende il nome di Weibull di parameteri λ, α.
Esercizio 9.4 Il tempo (in ore) richiesto per riparare un macchinario è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Calcola:

(1) la probabilità che la riparazione duri più di 2 ore.
(2) la probabilità condizionata che la riparazione duri più di 10 ore sapendo che la sua durata supera le 9 ore.

Soluzione.

(1)
$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}.$$

(2)
$$\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 9) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = e^{-1}.$$

Esercizio 9.5 Le prove riguardanti l'innocenza o la colpevolezza di un imputato in una inchiesta criminale si possono riassumere con il valore di una variabile aleatoria esponenziale X, la cui media μ dipende dalla effettiva colpevolezza dell'imputato: $\mu = 1$ se è innocente, $\mu = 2$ se è colpevole. La giuria giudica poi l'imputato colpevole se $X > c$ per un valore opportuno di c.

(1) Quale deve essere il valore di c se la giuria vuole essere certa al 95% di non condannate un innocente?
(2) Utilizzando il valore di c trovato nel punto (1), qual è la probabilità che un imputato colpevole sia condannato?
(3) Analisi statistiche suggeriscono che circa la meta? delle persone processate abbiano effettivamente commesso il reato. Utilizzando sempre lo stesso valore di c, qual è il valore atteso del numero di volte in cui la giuria sbaglia il verdetto (condanna un innocente o assolve un colpevole) su 10 sentenze?

Soluzione.

(1) Sia $A = \{$l'imputato è innocente$\}$. Sappiamo che $X|A \sim \mathcal{E}xp(1)$, mentre $X|A^c \sim \mathcal{E}xp(1/2)$. Allora
$$\frac{99}{100} = \frac{19}{20} = \mathbb{P}(X \leq c|A) = 1 - e^{-c}$$
ne segue che $c = \log(20) \approx 2.99$.

(2) Calcoliamo, dato $c = \log(20)$,
$$\mathbb{P}(X > c|A^c) = e^{-c/2} = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0.223.$$

(3) Dal testo abbiamo che
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c) = \frac{1}{2},$$
se chiamiamo p la probabilità di un errore della giuria abbiamo
$$\begin{aligned} p =& \mathbb{P}(X > c|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X < c|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{20} + 1 - \sqrt{20}\right) \\ \approx& 0.413. \end{aligned}$$
Sia Y la v.a. che conta il numero di errori della giuria su 10 sentenze (indipendenti). Allora $Y \sim Bin(10, p)$, e dunque $\mathbb{E}[Y] \approx 4.13$.

Variabili aleatorie Uniformi

Esercizio 10.1 Sia $Y \sim Unif[0, 5]$. Calcola la probabilità che le radici dell'equazione $4x^2 + 4xY + Y + 2$ siano reali.

Soluzione. Si consideri il discriminante della nostra equazione
$$\Delta = 16Y^2 - 16Y - 32,$$
$$\Delta \geq 0 \iff Y^2 - Y - 2 \geq 0 \iff Y \leq 1 \vee Y \geq 2$$
dunque
$$\mathbb{P}(\Delta \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(0 \leq Y \leq 2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 10.2 Un bastoncino lungo un metro viene spezzato casualmente in due.

(1) Qual è il valore atteso della lunghezza del pezzo più corto?
(2) Qual è il valore atteso del rapporto tra la lunghezza del pezzo pù corto e la lunghezza del pezzo più lungo?

Soluzione.

(1) Sia $X \in [0,1]$ il punto in cui il bastoncino viene spezzato. Sia L la lunghezza del pezzo più corto, i.e. $L = \min\{X, 1-X\} \in [0, 1/2]$. Dunque

$$\begin{aligned}F_L(\ell) =&\mathbb{P}(L \leq \ell)\\ =&1 - \mathbb{P}(\{X > \ell\} \cap \{1 - X > \ell\})\\ =&1 - \mathbb{P}(\ell \leq X \leq 1 - \ell)\\ =&(1 - 2\ell)\\ =&2\ell,\end{aligned}$$

dunque $L \sim Unif(0, 1/2)$.

(2) Sia R il rapporto tra il pezzo lungo e quello corto, i.e.

$$R = \frac{\min(X, 1-X)}{\max(X, 1-X)} = q(X) \in [0,1]$$

dove ho definito la funzione

$$q(x) = \frac{\min(x, 1-x)}{\max(x, 1-x)}, \qquad \forall x \in [0,1].$$

notiamo che quest'ultima può anche essere riscritta come segue

$$q(x) = \frac{x}{1-x}\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x) + \frac{1-x}{x}\mathbf{1}_{(1/2,1]}(x).$$

Dunque,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R] =&\mathbb{E}[r(X)]\\ =&\int_0^1 r(x) f_X(x) dx\\ =&\int_0^{1/2} \frac{x}{1-x} dx + \int_{1/2}^1 \frac{1-x}{x} dx\end{aligned}$$

Dato il cambio di variabile $y = 1 - x$ otteniamo che il primo integrale coincide con il secondo, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R] =&2\int_{1/2}^1 \frac{1-x}{x} dx\\ =&2[\log(x) - x]_{1/2}^1\\ =&2\log(x) - 1\\ \approx&0.3862\end{aligned}$$

Esercizio 10.3 Un segnale viene trasmesso in un istante aleatorio X. Il ricevitore viene acceso in un istante aleatorio Y e resta acceso per un intervallo di tempo aleatorio Z. Supponendo che X, Y e Z siano variabili aleatorie indipendenti con $X \sim Unif(0, 2)$ e $Y, Z \sim Unif(0, 1)$, qual è la probabilità che il segnale venga ricevuto?

Soluzione Il segnale viene ricevuto se e solo se si verifica l'evento

$$R = \{Y < X < Y + Z\}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R) =& \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_y^{y+z} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \right) f_Z(z)dz \\
=& \int_0^1 \int_0^1 \int_y^{y+z} \frac{1}{2} dxdydz \\
=& \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 zdydz \\
=& \int 12 \int_0^1 zdz \\
=& \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Variabili aleatorie Gaussiane e Gamma

Esercizio 11.1 Due ciclisti A, B fanno una corsa. In un tempo $t > 0$, A percorre $X(t)$ metri e B percorre $Y(t)$ metri. Supponiamo che $X(t)$, $Y(t)$ siano variabili normali indipendenti con media $\mu = t$ e varianza $\sigma^2 = t$. Calcolare in funzione di t il valore atteso della distanza $|X(t) - Y(t)|$ tra i due corridori.
Soluzione. Scriviamo

$$X(t) = t + \sqrt{t} Z_A, \qquad Y(t) = t + \sqrt{t} Z_B.$$

dove $Z_A, Z_B \sim \mathcal{N}(0,1)$ e quindi $Z_A - Z_B \sim \mathcal{N}(0,2)$. Ne segue che

$$X(t) - Y(t) = \sqrt{t}(Z_A - Z_B) \sim \mathcal{N}(0, 2t).$$

Possiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X(t) - Y(t)|] =& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|z| e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dz \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz
\end{aligned}$$

notiamo che l'integrando è la derivata della funzione

$$g(z) = -2te^{-z^2/4t}$$

da cui

$$\mathbb{E}[|X(t) - Y(t)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(-2te^{-z^2/4t} \right)_0^{\infty} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Esercizio 11.2 Siano X_1, X_2, X_3 v.a.i.i.d. normali standard. Qual è la legge di $X_1^2 + X_2^3 + X_3^2$?
Soluzione. Sia X una normale standard, allora

$$\begin{aligned}
F_{X^2}(x) =& \mathbb{P}(X^2 \leq x) \\
=& \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\
=& \mathbb{P}(X \leq \sqrt{x}) - \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{x}) \\
=& \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) \\
=& 2\Phi(\sqrt{x}) - 1
\end{aligned}$$

quindi possiamo ottenere la densità di X^2 differenziando la funzione di distribuzione.

$$\begin{aligned} f_{X^2}(x) =& \frac{d}{dx}\Phi(\sqrt{x}) \\ =& \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty)} \\ =& \frac{1}{\pi}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \\ =& \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x/2} \end{aligned}$$

ovvero la densità di una v.a. $\Gamma(1/2, 1/2)$. Per le proprietà delle variabili di tipo Gamma abbiamo

$$Z \sim \Gamma(3/2, 1/2).$$

ovvero

$$f_Z(z) = \frac{\frac{1}{2}e^{-z/2}\left(\frac{z}{2}\right)^{3/2-1}}{\Gamma(3/2)}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(z)$$

Esercizio 11.3 Un missile deve colpire un bersaglio situato in $(0, 0, 0)$. Il missile viene puntato verso $(0, 0, 0)$, ma i militari sanno che a causa delle condizioni esterne (vento, ecc..) ogni coordinata sarà sfalsata di un errore distribuito come una normale standard. Il missile sarà tuttavia in grado di distruggere il bersaglio se esplodera? ad una distanza minore di 2 dal bersaglio stesso. Qual è la probabilità che il missile riesca a distruggere il bersaglio?

Soluzione. Sia $A = \{\sqrt{Z} \le 2\} = \{Z \le 4\}$, allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) =& \int_0^4 f_Z(z)dz \\ =& \frac{1}{2\sqrt{2}\Gamma(3/2)}\int_0^4 e^{-z/2}\sqrt{z}dz \\ =& \frac{1}{2\sqrt{2}\Gamma(3/2)}\left(-2e^{-z/2}\sqrt{z}|_0^4 + 2\int_0^4 e^{-z/2}\frac{1}{\sqrt{z}}dz\right) \\ =& \frac{1}{2\sqrt{2}\Gamma(3/2)}\left(-2e^{-z/2}\sqrt{z}|_0^4 + 2\int_0^2 e^{-t^2/2}dt\right) \\ =& (\sqrt{2\pi})^{-1}\left(-2e^{-z/2}\sqrt{z}|_0^4 + 2\int_0^2 e^{-t^2/2}dt\right) \\ =& -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}e^{-2} + 2(\Phi(2) - \Phi(0)) \\ \approx& -0.216 + 2(0.9772 - 0.5) \\ =& 0.7384. \end{aligned}$$

dove, in primo luogo ho integrato per parti il prodotto $f(x)g'(x)$ con $f(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = e^{-x/2}$, e poi ho utilizzato il cambio di variabile $t = \sqrt{z}$. Inoltre, abbiamo utilizzato il fatto che $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.