Simulazione II Esonero di Probabilità e Statistica del 25- 1 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 1

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione Gamma di parametri α e λ, con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$

con $\Gamma(\alpha)$ funzione gamma di Eulero. Sia $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

i) Determinare la funzione generatrice dei momenti di Y e la sua distribuzione.

ii) Calcolare la media $\mathbf{E}Y$

iii) Calcolare la varianza $var(Y)$

iv) Per $n = 5$ ed $\alpha = 2$ determinare i valori di λ tali che $var(Y) < 10$

Esercizio 2

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_{10})$ estratto da una distribuzione normale di media 2 e varianza 9.

i) Determinare la distribuzione della media campionaria $\bar{X}$

ii) Calcolare $P(\bar{X} > 3)$

iii) Determinare la distribuzione della varianza campionaria S^2

Si ricordano i seguenti valori $\Phi(\frac{\sqrt{10}}{3}) \simeq 0.853$, $\Phi(\frac{3}{\sqrt{10}}) \simeq 0.828$.

Esercizio 3

Dato un campione estratto dalla distribuzione di Poisson di parametro λ, determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per λ. Se abbiamo ottenuto i seguenti dati $(2, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3)$, determinare la stima di massima verosimiglianza.

Esercizio 4

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza 4.

i) Determinare un intervallo di confidenza bilaterale per μ a livello 95% sapendo che $\bar{x} = 20$.

ii) Determinare la minima ampiezza n del campione per avere che l'ampiezza di questo intervallo di confidenza è minore di 1.

Si ricordi che $z_{0.025} \simeq 1.96$, $z_{0.05} \simeq 1.645$.

Esercizio 5

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_4)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza 25. Sappiamo che $\bar{x} = 2.5$ e che $\mu \geq 2$. Vogliamo verificare l'ipotesi nulla

$$H_0: \ \mu = 2$$

contro

$$H_1: \ \mu > 2$$

i) Determinare il valore della statistica del test.

ii) Determinare il p-dei-dati.

iii) Determinare per quali valori del livello di significatività α l'ipotesi H_0 è rifiutata.

Si ricordi che $\Phi(0.2) \simeq 0.579$, $\Phi(0.1) \simeq 0.5398$.