Simulazione II Esonero di Probabilità e Statistica del 25- 1 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 1

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione Gamma di parametri α e λ, con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$

con $\Gamma(\alpha)$ funzione gamma di Eulero. Sia $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

i) Determinare la funzione generatrice dei momenti di Y e la sua distribuzione.

ii) Calcolare la media $\mathbf{E}Y$

iii) Calcolare la varianza $var(Y)$

iv) Per $n = 5$ ed $\alpha = 2$ determinare i valori di λ tali che $var(Y) < 10$

Soluzione Esercizio 1

i) La funzione generatrice dei momenti di una variabile Gamma(α, λ) è:

$$\Phi_X(t) = \mathbf{E}e^{tX} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$$

da cui

$$\Phi_Y(t) = \mathbf{E}e^{tY} = \Pi_{i=1}^n \Phi_{X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{n\alpha}$$

dunque $Y \sim Gamma(n\alpha, \lambda)$

ii)

$$\mathbf{E}Y = \sum_{1=1}^n \mathbf{E}X_i = n\frac{\alpha}{\lambda}$$

iii)

$$varY = \sum_{1=1}^n varX_i = n\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

iv)

$$n\frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{5 \times 2}{\lambda^2} < 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 1$$

Esercizio 2

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_{10})$ estratto da una distribuzione normale di media 2 e varianza 9.

i) Determinare la distribuzione della media campionaria $\bar{X}$

ii) Calcolare $P(\bar{X} > 3)$

iii) Determinare la distribuzione della varianza campionaria S^2

Si ricordano i seguenti valori $\Phi(\frac{\sqrt{10}}{3}) \simeq 0.853$, $\Phi(\frac{3}{\sqrt{10}}) \simeq 0.828$.

Soluzione Esercizio 2

i) La media campionaria ha distribuzione normale con media 2 e varianza $\frac{9}{10}$.

ii)

$$P(\bar{X} > 3) = P\Big(\frac{\bar{X}-2}{3/\sqrt{10}} > \frac{3-2}{3/\sqrt{10}}\Big) = P(Z > \frac{\sqrt{10}}{3}) = 1 - \Phi(\frac{\sqrt{10}}{3}) \simeq 0.147$$

iii) Per la varianza campionaria abbiamo

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

e dunque

$$\frac{9S^2}{9} = S^2 \sim \chi^2_9$$

Esercizio 3

Dato un campione estratto dalla distribuzione di Poisson di parametro λ, determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per λ. Se abbiamo ottenuto i seguenti dati $(2, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3)$, determinare la stima di massima verosimiglianza.

Soluzione Esercizio 3

Lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro di una poissoniana è la media campionaria $\bar{X}$. La stima di massima verosimiglianza che otteniamo dai dati è dunque $\hat{\lambda} = 2$.

Esercizio 4

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza 4.

i) Determinare un intervallo di confidenza bilaterale per μ a livello 95% sapendo che $\bar{x} = 20$.

ii) Determinare la minima ampiezza n del campione per avere che l'ampiezza di questo intervallo di confidenza è minore di 1.

Si ricordi che $z_{0.025} \simeq 1.96$

Soluzione Esercizio 4

L'intervallo di confidenza bilaterale per la media di una normale quando è nota la sua varianza è dato da

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

e dunque nel nostro caso

$$\left(20 - 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}, 20 + 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

La sua ampiezza è $1.96\frac{4}{\sqrt{n}}$ da cui otteniamo la relazione

$$n > 16(1.96)^2$$

da cui $n \geq 62$.

Esercizio 5

Si consideri un campione aleatorio $(X_1, ..., X_4)$ estratto da una distribuzione normale di media μ e varianza 25. Sappiamo che $\bar{x} = 2.5$ e che $\mu \geq 2$. Vogliamo verificare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \ \mu = 2$$

contro

$$H_1 : \ \mu > 2$$

i) Determinare il valore della statistica del test.

ii) Determinare il p-dei-dati.

iii) Determinare per quali valori del livello di significatività α l'ipotesi H_0 è rifiutata.

Si ricordi che $\Phi(0.2) \simeq 0.579$.

Soluzione Esercizio 5

Si tratta di un test ad una coda. La statistica del test è

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ed l'ipotesi H_0 è rifiutata a livello di significatività α se questa statistica assume un valore maggiore di z_α. Il valore assunto dalla statistica è:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2.5 - 2}{5/2} = 0.2$$

e dunque il p-dei-dati è

$$P(Z > 0.2) = 1 - \Phi(0.2) = 0.421$$

Questo implica che l'ipotesi H_0 è rifiutata per ogni livello di significatività $\alpha > 0.421$.