Dip. di Ingegneria, Univ. Roma Tre
Prof. E. Scoppola, Dott.M. Quattropani

Probabilità e Statistica, 2017-18, I semestre
23 Novembre, 2017

Simulazione I Esonero

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1. (11%)

Si sono ottenuti i seguenti risultati in 11 misurazioni della quantità X:
6 volte il valore 0
3 volte il valore 1
1 volta il valore -2
1 volta il valore -1

1. Calcolare la media campionaria
2. Calcolare la varianza campionaria
3. Calcolare la mediana

Soluzione

$$\bar{X} = 0; \quad s^2 = 0,8; \quad \text{mediana} = 0$$

Nome:____

Esercizio 2. (23%)
Lancio 7 volte una moneta che ha uguale probabilità di dare il risultato testa (T) o croce (C)

1. Definire lo spazio degli esiti possibili e la sua cardinalità.
2. Determinare il numero degli esiti che al terzo lancio hanno T.
3. Determinare la probabilità che al terzo lancio si abbia T.
4. Determinare il numero degli esiti che hanno esattamente 2 volte T.
5. Determinare la probabilità di ottenere esattamente 2 volte T.

Soluzione
Lo spazio degli esiti dell'esperimento è $\Omega = \{T, C\}^7$, cioè $\omega = (a_1, a_2, ..., a_7)$ con $a_i \in \{T, C\}$ per ogni $\omega \in \Omega$. La sua cardinalità è

$$|\Omega| = 2^7.$$

$$|\{\omega \in \Omega : \ a_3 = T\}| = 2^6$$

$$P(a_3 = T) = \frac{1}{2}$$

$$|\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{7} \mathbb{1}_{\{a_i = T\}} = 2\}| = \binom{7}{2}$$

$$P(\text{esattamente } 2T) = \binom{7}{2} 2^{-7}$$

Nome:____

Esercizio 3.(23%)
Si hanno 3 urne. Due di esse contengono 3 palline, di cui 2 bianche e una nera mentre la terza urna contiene 6 palline, di cui 2 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso una delle tre urne con uguale probabilità e si estrae a caso una pallina dall'urna scelta.

1. Determinare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
2. Sapendo che la pallina estratta è bianca, valutare la probabilità di aver scelto l'urna contenente 6 palline.

Soluzione
Denotando con B l'evento estrazione di una pallina bianca ed U_3 e U_6 rispettivamente l'evento di aver scelto un'urna con 3 o 6 palline, abbiamo

$$P(B) = P(B \cap U_3) + P(B \cap U_6) =$$

$$P(B|U_3)P(U_3) + P(B|U_6)P(U_6) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$P(U_6|B) = \frac{P(B \cap U_6)}{P(B)} = \frac{1}{5}$$

Nome:____

Esercizio 4. (23%)
Si considerino due variabili aleatorie X e Y con distribuzione congiunta data dalle seguente densità di probabilità

$$f(x,y) = ax^2 \mathbb{1}_{\{x\geq 0,\, y\geq 0,\, x+y\leq 1\}}$$

1. Determinare il valore della costante a.
2. Calcolare le due densità marginali e i due valori medi EX e EY.
3. Determinare se le variabili X ed Y sono indipendenti.

Soluzione

Tenendo conto delle restrizioni imposte dalla funzione caratteristica dobbiamo imporre

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, ax^2 \mathbb{1}_{\{x+y\leq 1\}} = a \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy = 1$$

da cui $a = 12$. Integrando la densità $f(x,y)$ su y otteniamo

$$f(x) = 12x^2(1-x)$$

e integrando su x otteniamo

$$f(y) = 12 \int_0^{1-y} x^2 dx = 4(1-y)^3.$$

Le variabili aleatorie X ed Y non sono indipendenti. Per i valori medi otteniamo:

$$EX = 12 \int_0^1 x^3(1-x)dx = 12\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{5}$$

$$EY = 4 \int_0^1 y(1-y)^3 dy = 4 \int_0^1 (1-z)z^3\, dz = 4\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{5}$$

Nome:______________________________________

Esercizio 5.(20%)
Si considerino n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, X_i, con media nulla e varianza $\sigma^2 = 10$. Quanto deve essere grande n per poter affermare che la media aritmetica

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

in modulo è minore di 1 con una probabilità maggiore di 0,8?

Soluzione
Dalla disuguaglianza di Chebyshev applicata a $\bar{X}$, che ha media nulla e varianza $\frac{10}{n}$, otteniamo

$$P(|\bar{X}| \geq 1) \leq \frac{10}{n}$$

da cui otteniamo

$$P(|\bar{X}| < 1) = 1 - P(|\bar{X}| \geq 1) > 0,8$$

se $\frac{10}{n} < 0,2$ e dunque $n > 50$.