



Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

**Teorema KAM: un approccio
diagrammatico basato su tecniche
multiscala**

Candidata:

Faenia Vaia

Relatore:

Prof. Guido Gentile

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1	Introduzione	2
2	Teorema KAM	6
3	Rappresentazione con gli alberi	10
4	Analisi multiscala	15
	Bibliografia	22

1 Introduzione

La teoria delle perturbazioni si occupa dello studio di problemi che, pur non essendo risolvibili esattamente, si ottengono modificando leggermente problemi che lo siano [9]. Tipicamente questo si manifesta attraverso la dipendenza da un parametro ε , chiamato *parametro perturbativo*, tale che per $\varepsilon = 0$ il problema diventa esattamente risolvibile. Per esempio questo accade se si studia un sistema descritto da equazioni differenziali che dipendono da un parametro ε e di cui, per $\varepsilon = 0$, si sa calcolare la soluzione esplicita. Si può allora cercare una soluzione delle equazioni complete nella forma di un'espansione in serie di potenze in ε : il termine dominante dell'espansione costituisce la soluzione delle equazioni che si ottengono ponendo $\varepsilon = 0$, mentre i termini successivi sono delle correzioni. L'idea di fondo è che, arrivando a ordini in ε sempre più alti, si ottenga un'approssimazione via via migliore della soluzione del sistema completo. Spesso l'uso della teoria delle perturbazioni rappresenta l'unica via per descrivere, se non altro in modo approssimato, le proprietà di un sistema di cui non sappiamo risolvere le equazioni. A volte, tuttavia, è possibile dimostrare che la serie di potenze in ε è ben definita, come serie convergente o anche solo asintotica, così che l'approccio perturbativo consente una trattazione rigorosa del problema sotto studio.

Una delle applicazioni più famose della teoria delle perturbazioni è la meccanica celeste. Newton aveva fornito una descrizione matematica del moto dei pianeti attorno al Sole introducendo la gravitazione universale; ciò nonostante una rappresentazione esatta risultava possibile solo facendo parecchie approssimazioni e trascurando di conseguenza gli aspetti su cui si aveva poco controllo. Per esempio, nello studio del moto della Terra attorno al Sole, nel caso in cui veniva presa in considerazione la sola forza gravitazionale tra questi due corpi (problema dei due corpi o *problema di Keplero*), si trovava che il moto rispettava le *leggi di Keplero*; si veda per esempio [14]. Tuttavia, non appena si teneva conto anche della forza gravitazionale dovuta all'interazione del Sole e della Terra con gli altri pianeti (problema degli n corpi), il moto mostrava delle discrepanze rispetto a quello dettato da tali leggi. Il primo caso, cioè quello della Terra attorno al Sole in cui si trascurava l'attrazione gravitazionale con gli altri pianeti, rappresentava un

esempio di sistema *integrabile*: si potevano quindi risolvere esattamente le equazioni differenziali chiamate in causa. Sorsero allora spontanei alcuni interrogativi riguardanti l'eventuale integrabilità del sistema completo e la sopravvivenza dei moti regolari nel caso in cui venisse presa in esame anche l'interazione con gli altri pianeti.

Queste domande attirarono l'attenzione di molti matematici, fisici e astronomi, che per secoli diedero un enorme contributo alla soluzione del problema seguendo l'approccio della teoria delle perturbazioni. Le equazioni del moto del sistema costituito dal Sole e dai pianeti del sistema solare, possono essere viste come equazioni di un sistema hamiltoniano che coinvolgono un parametro perturbativo ε : infatti, se M_0 indica la massa del Sole e m_i la massa del pianeta i -esimo, si possono esprimere le masse dei pianeti nella forma $m_i = \varepsilon M_i$, dove M_i è confrontabile con M_0 ed ε è quindi un parametro piccolo. Le equazioni che regolano il moto dei pianeti, allora, per $\varepsilon = 0$, passando a variabili eliocentriche, si disaccoppiano e descrivono ciascuna un problema a due corpi (pianeta e Sole). L'interazione tra i pianeti si può considerare invece come una perturbazione di un sistema altrimenti integrabile: per $\varepsilon \neq 0$, le equazioni descrivono ancora un sistema hamiltoniano, ma non sono più indipendenti. Ne segue che il sistema non è più risolubile esattamente e in tal caso si dice che il sistema hamiltoniano è *quasi-integrabile*.

Qui entra in scena la teoria delle perturbazioni. Si può affrontare il problema in due passi distinti: il primo consiste nel trovare le serie di potenze, dette *soluzioni formali* o *serie formali* o *serie di Lindstedt* [19], che risolvono le equazioni del moto ordine per ordine; il secondo si occupa di studiarne la convergenza e tra i due passi è sicuramente il più difficile. Al problema della convergenza dedicarono molti anni alcuni matematici tra cui Weierstrass, Dirichlet, Kronecker e Poincaré. In particolare Poincaré, con il suo *teorema di trivialità* [24], dimostrò la non esistenza di integrali primi che si potessero scrivere come serie convergenti per perturbazioni di sistemi integrabili. Ciò nonostante, in astronomia, si continuarono ad usare estensivamente le serie perturbative: per quanto si ritenesse che tali serie divergessero, non si poteva non notare che fornivano una descrizione approssimata affidabile dei moti celesti. È importante osservare come lo sviluppo

della teoria delle perturbazioni trovò grandi applicazioni non solo in questo ambito, contribuendo alla scoperta del pianeta Nettuno (1846), ma anche in meccanica quantistica, in elettrodinamica e in meccanica statistica.

Con il lavoro di Poincaré sembrò ormai fuori discussione che le serie perturbative non potessero convergere; in altre parole, divenne sempre più diffusa l'idea che una qualsiasi perturbazione, per quanto piccola, distruggesse l'integrabilità di un sistema. Nel 1953 un gruppo di matematici e fisici guidati da Fermi effettuò delle simulazioni al computer per studiare un sistema che era l'analogo unidimensionale di un cristallo, formato da una catena di masse collegate tra loro tramite molle che rispettavano la legge di Hooke ma con deboli correzioni lineari (il problema è ora noto come problema di Fermi-Pasta-Ulam [8]). L'esperimento numerico serviva per capire come venisse trasmesso il calore nei solidi: ci si aspettava che l'energia termica, indotta nei modi a frequenza più bassa, si sarebbe distribuita agli altri modi di oscillazione fino a raggiungere l'equipartizione dell'energia. Nelle prime simulazioni fu proprio questo il risultato ottenuto; tuttavia, se si lasciava girare il programma più a lungo, si poteva osservare come dopo circa 157 periodi di oscillazione l'energia tornava nei modi di partenza. Lo stato di equipartizione non veniva raggiunto e l'energia ritornava periodicamente nello stato iniziale: questo mostrava che i moti del sistema conservavano alcune delle proprietà di regolarità del sistema imperturbato.

Nel 1943 Siegel dimostrò la convergenza delle serie formali che risolvono le equazioni di un sistema dinamico nel piano complesso [27]. Tale sistema, che è noto oggi come *problema di Siegel*, presentava notevoli analogie con i sistemi hamiltoniani quasi-integrabili. Il lavoro di Siegel stimolò molti matematici, tra cui Kolmogorov, nel cercare delle condizioni generali sotto cui dimostrare la convergenza delle serie nel caso dei sistemi quasi-integrabili. La dimostrazione dell'esistenza di moti stabili *quasi-periodici* per sistemi hamiltoniani (*quasi-integrabili non degeneri*) da parte di Kolmogorov [18] rivoluzionò il problema e portò alla formulazione di quello che sarà poi chiamato *teorema KAM*. Dopo la prima dimostrazione di Kolmogorov nel 1954, ne furono date altre, basate sempre sulle idee dello stesso Kolmogorov, da Arnol'd [1, 2], nel 1962, e da Moser [21], nel

1963; da qui l'acronimo KAM. Questo teorema fornì un algoritmo iterativo per la costruzione di serie convergenti, e mise in evidenza la presenza di soluzioni stabili che rimangono vicine ai moti regolari del sistema imperturbato. Il teorema KAM ebbe un notevole impatto sul problema di Fermi-Pasta-Ulam: dimostrando che in un sistema integrabile perturbato gran parte delle orbite restano quasi periodiche, il teorema KAM diede al problema una nuova interpretazione che vedeva tale paradosso come conseguenza della presenza di orbite regolari. Tuttavia l'applicabilità del teorema KAM al problema di Fermi-Pasta-Ulam è tutt'altro che banale, principalmente a causa dell'alto numero di gradi di libertà del sistema. Solo recentemente sono stati ottenuti risultati rigorosi, tra l'altro parziali e non definitivi; si veda [11] per una rassegna.

L'approccio di Kolmogorov era completamente diverso da quello di Siegel, il cui metodo, visto retrospettivamente, si può considerare molto vicino a quello sviluppato in fisica dalla teoria quantistica dei campi. Il metodo di Kolmogorov consiste nell'applicare più volte il teorema della funzione implicita guardando le serie formali come soluzioni implicite delle equazioni del moto: questo porta a un algoritmo ricorsivo che ad ogni passo restringe il dominio di analicità di tali funzioni implicite. Una delle idee cruciali consta nel fissare una volta per tutte le frequenze del moto quasi-periodico che si vuole studiare. Per un'esposizione dettagliata si veda per esempio [17].

Il metodo di Siegel, invece, si concentra sugli addendi che compongono le serie formali e, tramite tecniche multiscala tipiche della teoria quantistica dei campi, mostra che tali termini, che in principio sono stimati da fattoriali, in realtà possono essere maggiorati in modo più accurato e tale da far convergere la serie. Si veda anche [4]. Quest'ultimo metodo non fu subito recepito e applicato ai problemi di meccanica hamiltoniana. Fu Eliasson che, attraverso lo studio diretto delle serie di Lindstedt, dimostrò che l'approccio di Siegel poteva essere esteso allo studio di sistemi hamiltoniani quasi-integrabili. Più precisamente Eliasson dimostrò l'esistenza di *cancellazioni* notevoli a tutti gli ordini perturbativi [5, 6, 7] che comportano la convergenza delle serie di Lindstedt. Si noti che, nell'approccio di Kolmogorov, la convergenza delle serie perturbative è invece una conseguenza

della convergenza dello schema iterativo, come fu osservato per la prima volta da Moser [22].

Nella tesi ci occuperemo di dimostrare il teorema KAM attraverso lo studio della convergenza delle serie di Lindstedt, sfruttando a fondo l'analogia tra teoria perturbativa e teoria quantistica dei campi, evidenziata successivamente da Gallavotti [13]. Rappresenteremo in particolare gli addendi delle serie formali in termini di grafi reminescenti dei diagrammi di Feynman.¹ Utilizzeremo quindi la decomposizione multiscala e il metodo di gruppo di rinormalizzazione per stimare il valore di tali diagrammi e mostrare che la somma dei contributi di ogni ordine perturbativo n fissato può essere stimato da una costante elevata alla potenza n . Questo richiederà uno studio delicato delle serie perturbative, poiché ogni contributo di ordine n è dato dalla somma di vari addendi, che, presi singolarmente, sono in generale stimati da fattoriali. Bisognerà quindi dimostrare l'esistenza di cancellazioni, nello spirito del lavoro originale di Eliasson e di lavori successivi, quali [13, 15, 16, 17], tali da assicurare che le stime con i fattoriali si possono migliorare in stime a potenza.

2 Teorema KAM

Consideriamo un sistema hamiltoniano a ℓ gradi di libertà con hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\alpha, A) = \mathcal{H}_0(A) \tag{1}$$

con (α, A) variabili angolo-azione. Il sistema descritto dalla (1) è integrabile [14]; dalla soluzione alle equazioni di Hamilton possiamo notare che le variabili azione restano costanti mentre le variabili angolo ruotano uniformemente con frequenza $\omega_0 = \partial_A \mathcal{H}_0(A_0)$, i.e.

$$A(t) = A_0 \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t.$$

¹Diagrammi introdotti da Richard Feynman negli anni '40 e applicati nella teoria quantistica dei campi, formati da simboli convenzionali (linee, punti, ...), a cui corrispondono dei significati precisi.

Diremo che tale sistema integrabile è caratterizzato da un moto quasi periodico che si svolge su *tori invarianti* ℓ dimensionali parametrizzati da ℓ variabili azione, [12].

Vogliamo vedere cosa si “converva” del moto integrabile se all’hamiltoniana (1) aggiungiamo una perturbazione:

$$\mathcal{H}(\alpha, A) = \mathcal{H}_0(A) + \varepsilon f(\alpha, A). \quad (2)$$

Il sistema descritto da questa nuova hamiltoniana, come afferma il *Teorema di trivialità di Poincaré*, [24], anche sotto le ipotesi di analiticità di $\mathcal{H}_0(A)$ e $f(\alpha, A)$, in generale non è integrabile. Si veda anche [10], par. 5.2 *Generic non integrability*.

Esistono però delle condizioni sotto le quali il sistema descritto dall’hamiltoniana (2) sia *quasi-integrabile*, cioè tale che la dinamica del sistema perturbato sia “vicina” a quella del sistema imperturbato, ovvero che, a meno di un insieme di misura “piccola”, il moto si svolga su tori *invarianti* leggermente deformati rispetto a quelli del sistema imperturbato e abbia luogo su di essi in modo quasi-periodico con la stessa frequenza ω del sistema privo di perturbazione. Il risultato sarà una versione del teorema KAM, enunciato fondamentale per la teoria perturbativa.

Definizione 1 (Condizione di anisocronia e sistema anisocrono). Un’hamiltoniana integrabile $\mathcal{H}(A)$ soddisfa la *condizione di anisocronia* se:

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}(A)}{\partial A_i \partial A_j}\right) \neq 0. \quad (3)$$

Un sistema hamiltoniano, la cui hamiltoniana verifica tale condizione, viene detto *anisocrono*.

Definizione 2 (Condizione diofantea). Si definiscono *vettori diofantei* i vettori ω che verificano la condizione diofantea:

$$|\omega \cdot \nu| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{0\}, \quad (4)$$

per qualche γ e τ positivi, con \cdot prodotto scalare standard in \mathbb{R}^ℓ e $|\cdot|$ norma indotta. Le costanti γ e τ vengono dette *esponenti diofantei*.

Consideriamo dunque l'hamiltoniana (2) con:

1. $\mathcal{H}_0(A)$ ed $f(\alpha, A)$ analitiche in A , in un dominio $D \subset \mathbb{R}^\ell$;
2. $\mathcal{H}_0(A)$ ed $f(\alpha, A)$ analitiche in α , per $\alpha \in \Sigma_\xi := \{\alpha : \text{Re}(\alpha) \in \mathbb{T}^\ell \text{ e } |\text{Im}(\alpha)| \leq \xi\}$;
3. $\mathcal{H}_0(A)$, con $A \in D$, soddisfa la condizione di anisocronia (3);
4. $\omega_0 := \frac{\partial \mathcal{H}_0(A_0)}{\partial A}$ verifica la condizione diofantea (4), con $\gamma = \frac{1}{C_0}$ con C_0 costante.

Dato che f è analitica, si può sviluppare in serie di Fourier:

$$f(\alpha, A) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^\ell} e^{i\nu \cdot \alpha} f_\nu(A) \quad \text{con} \quad |f_\nu(A)| \leq F e^{-\xi|\nu|} \quad (5)$$

dove ξ è definita nella condizione 2 e

$$F = \max_{A \in \mathcal{W}(A_0, \rho_0)} \max_{\alpha \in \Sigma_\xi} \{f(\alpha, A)\} \quad (6)$$

con $\mathcal{W}(A_0, \rho_0) = \{A \in \mathbb{R}^\ell : |A - A_0| \leq \rho_0\} \subseteq D$.

Si veda anche [16].

Teorema 1 (KAM). *L'hamiltoniana (2), con le proprietà appena descritte, ammette una famiglia ε -analitica di soluzioni con punto di partenza $\alpha_0 \in \mathbb{T}^\ell$, e aventi la forma:*

$$A(t) = A_0 + H(A_0, \alpha_0 + \omega_0 t; \varepsilon), \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t + h(A_0, \alpha_0 + \omega_0 t; \varepsilon), \quad (7)$$

dove (scrivendo $\psi = \alpha_0 + \omega_0 t$ con $\psi \in \mathbb{T}^\ell$):

1. $H(A, \psi; \varepsilon)$ e $h(A, \psi; \varepsilon)$ sono analitiche in ψ , per $\text{Re}(\psi) \in \mathbb{T}^\ell$ e $|\text{Im}(\psi)| \leq \frac{\xi}{2}$;
2. $H(A, \psi; \varepsilon)$ e $h(A, \psi; \varepsilon)$ sono analitiche in $A \in \mathcal{W}(A_0, \rho_0)$;
3. $h(A, \psi; \varepsilon)$ ha media nulla in \mathbb{T}^ℓ ;

4. $H(A_0, \psi; \varepsilon)$ e $h(A_0, \psi; \varepsilon)$ sono analitiche per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, con ε_0 sufficientemente piccolo.

Questo significa che l'insieme $(A(t), \alpha(t))$, per ε abbastanza piccolo, al variare di $\alpha_0 \in \mathbb{T}^l$ descrive un toro invariante analitico per (2), sul quale il moto è quasi-periodico con velocità angolare diofantea ω_0 . Questo toro, per $\varepsilon = 0$, si riduce al toro $A(t) = A_0$, $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t \in \mathbb{T}^l$ dell'hamiltoniana imperturbata.

Osservazione 1. Per semplicità, fisseremo d'ora in avanti $\alpha_0 = 0$; il caso $\alpha_0 \neq 0$ si può discutere allo stesso modo.

Dimostreremo il teorema KAM attraverso lo studio della convergenza delle serie di Lindstedt, [27]: serie formali ricavate dallo sviluppo in serie di potenze di h e H , definite in (7), imponendo che risolvano le equazioni del moto a ogni ordine perturbativo.

Osservazione 2. Il problema principale di questa tecnica è la presenza di *piccoli divisori* difficili da stimare che compaiono nello sviluppo in serie di Fourier sotto la forma $(\omega \cdot \nu)$ dove ω è il vettore delle frequenze e $\nu \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{0\}$.

Ai fini della convergenza delle serie, che costituisce il nostro obiettivo principale, non sarà sufficiente escludere tutti quei vettori ω che rendono nullo il denominatore, cioè tutti i vettori ω razionalmente dipendenti, i.e. ω tali che $\forall \nu \in \mathbb{Z}^\ell$ $\omega \cdot \nu = 0$, ma avremo bisogno per l'appunto della condizione diofantea, che infatti costituisce una delle ipotesi. Tuttavia anche con questa premessa la convergenza non sarà automatica: infatti stimando individualmente gli addendi che vanno a formare i coefficienti di Taylor in ε , otterremo una maggiorazione con termini fattoriali; si veda anche [12, 17]. In realtà, attraverso la verifica di alcune *cancellazioni* si potrà vedere che complessivamente questi fattori non producono problemi, [3, 13, 15, 16, 17]. Per capire più velocemente quali termini possono effettivamente cancellarsi tra loro, ci aiuteremo con una rappresentazione grafica delle formule ricorsive.

3 Rappresentazione con gli alberi

Le equazioni ricavate dagli sviluppi di Taylor e Fourier ([16] par. 2) hanno una struttura iterativa che ci permette di poterle rappresentare in modo compatto attraverso un'unica quantità, $X_\nu^{(k)}(\zeta)$, definita come:

$$X_\nu^{(k)}(\zeta) = \begin{cases} h_\nu^{(k)} & \text{se } \zeta = h \text{ e } \nu \neq 0 \\ H_\nu^{(k)} & \text{se } \zeta = H \text{ e } \nu \neq 0 \\ \mu^{(k)} := H_0^{(k)} & \text{se } \zeta = \mu \text{ e } \nu = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$X_\nu^{(k)}(\zeta)$ rappresenta perciò la k -esima componente di Taylor, con ν indice di Fourier, di H , h e μ . Come abbiamo appena detto, $X_\nu^{(k)}(\zeta)$ sarà rappresentata graficamente tramite dei particolari *diagrammi ad albero*, di seguito indicati con ϑ . Si veda anche [12, 15, 16].

Un grafo G è una coppia di insiemi disgiunti: $G = (V, L)$ dove V rappresenta un insieme discreto non vuoto, costituito da un numero finito di elementi che chiameremo *nodi*, mentre L è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $V \times V$ i cui elementi sono chiamati *spigoli* o *lati*. Si dice che uno spigolo $\lambda \in L$ connette i due nodi v e w se $\lambda = (v, w)$; in tal caso i nodi v e w saranno chiamati gli estremi dello spigolo. Un cammino è un sottoinsieme di L costituito da spigoli che hanno a due a due un nodo in comune. Un albero è un grafo che ha un nodo r (chiamato *radice*) tale che esiste un solo spigolo che ha r come estremo e non esistono cammini chiusi (cioè cammini che connettono un nodo a se stesso). Gli alberi sono costituiti da nodi e spigoli, che in questo caso vengono appropriatamente chiamati rami. Denotiamo con $V(\vartheta)$ l'insieme dei *vertici*, cioè l'insieme dei nodi esclusa la radice, che posizioniamo a sinistra, e con $L(\vartheta)$ l'insieme dei rami. L'altro estremo del ramo della radice, v_0 , è chiamato *ultimo vertice*; quindi ogni ramo è compreso tra due vertici, tranne quello della radice che ha come unico vertice v_0 .

Gli alberi che andremo a considerare sono *parzialmente* ordinati: possiamo immaginare ogni ramo come una freccia che punta verso la radice. Tra i vertici si stabilisce quindi una relazione d'ordine, indicata con \leq : diremo che $v_2 < v_1$ se v_1 segue v_2 (v_2 precede v_1), cioè se v_1 è lungo il cammino minimo che collega v_2

alla radice. Dato che ogni ramo è orientato verso la radice, e quindi verso sinistra, questa relazione d'ordine non permette di confrontare tutti i vertici tra loro: da qui l'avverbio "parzialmente". Consideriamo un ramo che collega v_2 a v_1 , con $v_1 > v_2$, diremo che questo *emerge* da v_2 e *entra* in v_1 dato che la freccia punta da v_2 a v_1 .

Dato un albero ϑ , chiamiamo *sottoalbero* di ϑ un albero ricavato nel seguente modo: scelto un vertice w , consideriamo i vertici v che precedono w , cioè v tali che $v \leq w$, e gli spigoli che li connettono incluso il ramo che emerge da w .

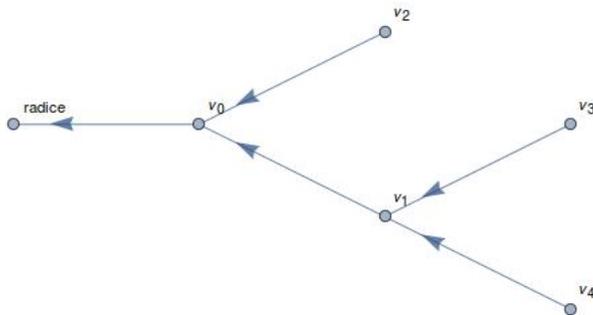


Figura 1: In figura è rappresentato un albero con le caratteristiche descritte nel testo. I rami sono orientati verso la radice e tra i vertici c'è una relazione d'ordine parziale. Ad esempio per i vertici v_0 e v_1 diremo che v_1 precede v_0 , cioè $v_1 \leq v_0$. Come si può facilmente vedere, la relazione d'ordine è parziale in quanto ci sono vertici che non possono essere confrontati tra di loro, come v_2 e v_1 .

Diremo che due alberi sono *equivalenti* se possono essere trasformati l'uno nell'altro deformando con continuità le linee sul piano in modo che queste non si attraversino.

Per poter rappresentare ogni addendo degli sviluppi di Taylor con questi diagrammi, ogni albero dovrà essere caratterizzato da speciali "etichette", cioè un insieme finito di indici da associare ai vertici. Il risultato sarà appunto un albero etichettato.

Dato un albero ϑ , ad ogni vertice v assegnamo il seguente insieme di indici $\{d_v, \delta_v, k_v, \nu_v, \zeta_v^1, \zeta_v^2, m_v\}$, dove:

- d_v è il numero di vertici w tali che $w \leq v$, che prende il nome di *grado* del sottoalbero che ha v come ultimo vertice;
- $\delta_v \in \{0, 1\}$;
- k_v , o *ordine* del sottoalbero avente v come ultimo vertice, è definito come $k_v = \sum_{w \leq v} \delta_w$;
- $\nu_v \in \mathbb{Z}^\ell$, o *modo*;
- ζ_v^1 e ζ_v^2 che possono valere h, H, μ ;
- m_v indica il numero di rami che entrano nel vertice v . Ovviamente se v è un vertice in cui non entrano rami, $m_v = 0$. Se definiamo p_v e q_v come il numero di rami entranti in v e uscenti da vertici w che hanno, rispettivamente, etichetta $\zeta_w^1 = h$ e $\zeta_w^1 \in \{H, \mu\}$, allora $m_v = p_v + q_v$.

Sia λ_v il ramo che collega il vertice v , con etichette ζ_v^1 e ζ_v^2 , a un vertice v' . Tale ramo λ_v viene rappresentato con la scrittura $\zeta_v^1 \leftarrow \zeta_v^2$. Quindi ζ_v^1 e ζ_v^2 possono essere scelti in modo tale che gli sviluppi di Taylor di $H^{(k)}$, $h^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ siano espressi come somme di termini $\zeta_v^1 \leftarrow \zeta_v^2$, e in particolare:

- $H^{(k)}$ è dato dalla somma di contributi che indichiamo con $H \leftarrow h$. H , l'elemento di sinistra, sta ad indicare che l'equazione è quella di $H^{(k)}$, mentre h , l'elemento di destra, denota una derivata rispetto alla variabile α .
- Indichiamo invece i contributi di $h^{(k)}$ con $h \leftarrow h$ e $h \leftarrow H$, dove l'elemento di sinistra, h , si riferisce alla somma di termini di $h^{(k)}$, mentre l'elemento di destra è h se deriviamo rispetto ad α , H se deriviamo rispetto ad A . Notiamo che per $k = 1$ abbiamo solo due contributi del tipo $h \leftarrow h$ e $h \leftarrow H$.
- Analogamente si può vedere dall'equazione per μ che ha due contributi entrambi del tipo $\mu \leftarrow H$.

Osservazione 3. Per costruzione, non esistono rami del tipo $\mu \leftarrow h$, $H \leftarrow H$, $h, H \leftarrow \mu$.

Per quanto riguarda il significato dell'indice δ_v , come si può osservare, nella rappresentazione di $h^{(k)}$ e di $\mu^{(k)}$ ci sono due termini uguali; per distinguerli si userà:

- $\delta_v = 0$ per rappresentare i contributi in cui compare \mathcal{H}_0 ;
- $\delta_v = 1$ per rappresentare i contributi in cui compare f .
- Ai contributi $h \leftarrow h$ e $H \leftarrow h$ verrà comunque assegnata etichetta $\delta_v = 1$.

Introduciamo due nuovi oggetti: il *propagatore*, $g(\omega \cdot \nu_{\lambda_v})$, e l'*operatore*, O_{λ_v} . Questi variano a seconda del ramo di appartenenza, come possiamo vedere dalle tabelle 1 e 2, in quanto ad ogni ramo corrisponde un elemento diverso di ogni equazione. Ad ogni ramo λ_v associamo anche un *momento*, ν_{λ_v} , definito come

$$\nu_{\lambda_v} := \sum_{w \leq v} \nu_w. \quad (9)$$

Operatore	Propagatore	Ramo	Momento
$i\nu_{v'} \cdot (-iT\nu_v)$	$[i\omega \cdot \nu_{\lambda_v}]^{-2}$	$h \leftarrow h$	$\nu_{\lambda_v} \neq 0$
$i\nu_{v'} \cdot (\partial_{A_v})$	$[i\omega \cdot \nu_{\lambda_v}]^{-1}$	$h \leftarrow H$	$\nu_{\lambda_v} \neq 0$
$\partial_{A_{v'}} \cdot (-i\nu_v)$	$[i\omega \cdot \nu_{\lambda_v}]^{-1}$	$H \leftarrow h$	$\nu_{\lambda_v} \neq 0$
$\partial_{A_{v'}} \cdot (-T^{-1}\partial_{A_v})$	1	$\mu \leftarrow H$	$\nu_{\lambda_v} = 0$

Tabella 1: Operatore e propagatore per rami distinti dalla radice

Operatore	Propagatore	Ramo	Momento
$-iT\nu_v$	$[i\omega \cdot \nu_{\lambda_v}]^{-2}$	$h \leftarrow h$	$\nu_{\lambda_v} \neq 0$
∂_{A_v}	$[i\omega \cdot \nu_{\lambda_v}]^{-1}$	$h \leftarrow H$	$\nu_{\lambda_v} \neq 0$
$-i\nu_v$	$[i\omega \cdot \nu_{\lambda_v}]^{-1}$	$H \leftarrow h$	$\nu_{\lambda_v} \neq 0$
$-T^{-1}\partial_{A_v}$	1	$\mu \leftarrow H$	$\nu_{\lambda_v} = 0$

Tabella 2: Operatore e propagatore per il ramo della radice

Osservazione 4. Il propagatore può essere scritto come

$$g(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}) = \frac{1}{(i\omega \cdot \nu_{\lambda_v})^{R_{\lambda_v}}}, \quad (10)$$

dove R_{λ_v} può assumere i seguenti valori:

- 0 se λ_v è un ramo del tipo $\mu \leftarrow H$;
- 1 se λ_v è un ramo del tipo $H \leftarrow h$ o $h \leftarrow H$;
- 2 se λ_v è un ramo del tipo $h \leftarrow h$.

Inoltre la (10) va interpretata come 1 se $\nu_{\lambda_v} = 0$.

Moltiplichiamo gli operatori definiti sopra per la funzione

$$\left(\prod_{\substack{v \in V(\vartheta) \\ \delta_v=1}} f_{\nu_v}(A_v) \right) \left(\prod_{\substack{v \in V(\vartheta) \\ \delta_v=0}} H_0(A_v) \right). \quad (11)$$

Osservazione 5. In (11), A_v sta per indicare che le derivate ∂_{A_v} degli operatori nelle tabelle 1-2 agiscono sulle funzioni associate al vertice v e si calcola poi il risultato per $A_v = A_0, \forall v \in V(\vartheta)$.

Defininendo il *tensore* O_v associato al vertice v come

$$\begin{aligned} O_v = & \{ [(-iT\nu_v)\delta_{\zeta_v^1, h}\delta_{\zeta_v^2, h} + (\partial_{A_v})\delta_{\zeta_v^1, h}\delta_{\zeta_v^2, H} \\ & + (-i\nu_v)\delta_{\zeta_v^1, H}\delta_{\zeta_v^2, h} + (-T^{-1}\partial_{A_v})\delta_{\zeta_v^1, \mu}\delta_{\zeta_v^2, H}] \cdot \\ & \cdot \prod_{\substack{w \\ v'=v}} [(i\nu_v)\delta_{\zeta_w^1, h} + (\partial_{A_v})(\delta_{\zeta_w^1, H} + \delta_{\zeta_w^1, \mu})] \} \\ & \cdot [f_{\nu_v}(A_v)\delta_{\delta_v, 1} + \mathcal{H}_0(A_v)\delta_{\delta_v, 0}]|_{A_v=A_0} \end{aligned} \quad (12)$$

otterremo che:

$$\prod_{v \in V(\vartheta)} O_v = \prod_{v \in V(\vartheta)} O_{\lambda_v} \prod_{\substack{v \in V(\vartheta) \\ \delta_v=1}} f_{\nu_v}(A_v) \prod_{\substack{v \in V(\vartheta) \\ \delta_v=0}} \mathcal{H}_0(A_v)|_{A_v=A_0}. \quad (13)$$

Abbiamo bisogno di un'ultima quantità che unisca tutti i concetti dati e dia definitivamente un valore all'albero.

Definizione 3 (Valore di un albero etichettato). Chiameremo *valore di un albero etichettato*, $Val(\vartheta)$, la seguente quantità

$$Val(\vartheta) = \prod_{v \in V(\vartheta)} \frac{O_v}{m_v!} g(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}) \quad (14)$$

ricordando che con m_v sono indicati il numero di rami entranti nel vertice v .

Lemma 1. *Ogni componente di Taylor può essere scritta come*

$$X_\nu^{(k)}(\zeta) = \sum_{\vartheta \in T_{k,\nu}(\zeta)} Val(\vartheta) \quad (15)$$

dove per $T_{k,\nu}(\zeta)$ si intende l'insieme di tutti gli alberi non equivalenti di ordine k tali che $\nu_{\lambda_{v_0}} = \nu$ e $\zeta_{v_0}^1 = \zeta$, se λ_{v_0} è la linea della radice di ϑ e v_0 è il vertice da cui λ_{v_0} emerge.

Proposizione 1. *Le etichette degli alberi soddisfano la seguente condizione di compatibilità:*

se $\delta_v = 0$ allora $\zeta_v^1 = h, \mu$, $\zeta_v^2 = H$, $p_v = 0$ e $m_v \equiv q_v \geq 2$.

Inoltre per ogni v , $d_v \leq 2k_v - 1$, da cui segue che in generale $d \leq 2k - 1$.

4 Analisi multiscala

Per dimostrare la convergenza delle serie di Lindstedt, dobbiamo essere in grado di stimare l'equazione (15): per farlo utilizzeremo l'*analisi multiscala* che ci permetterà di decomporre il propagatore introducendo una nuova etichetta (*scala*).

Sia $\chi(x)$ una funzione C^∞ tale che:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 2 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Definiamo anche

$$\begin{aligned} \chi_n(x) &= \chi(2^n x) - \chi(2^{n+1} x) & n \geq 0 \\ \chi_{-1}(x) &= 1 - \chi(x) \end{aligned} \quad (17)$$

Come possiamo notare, tali funzioni realizzano una partizione C^∞ dell'unità, in quanto:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{(17)}{=} \chi_{-1}(x) + \chi(x) \\ &= \chi_{-1}(x) + \sum_{n \geq 0} \chi_n(x) \\ &= \sum_{n \geq -1} \chi_n(x) \end{aligned} \quad (18)$$

La decomposizione multiscala del propagatore ne è una diretta conseguenza:

$$\begin{aligned} g(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}) &= \frac{1}{(i\omega \cdot \nu_{\lambda_v})^{R_{\lambda_v}}} \stackrel{(18)}{=} \sum_{n \geq -1} \frac{\chi_n(x)}{(i\omega \cdot \nu_{\lambda_v})^{R_{\lambda_v}}} \\ &= \sum_{n \geq -1} g^{(n)}(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}). \end{aligned} \quad (19)$$

La quantità $g^{(n)}(\omega \cdot \nu_{\lambda_v})$ è chiamata *propagatore di scala n* ed è, per costruzione, una funzione C^∞ a supporto compatto per $n \geq -1$, i.e. $g^{(n)}(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}) \neq 0$ per $n \geq 0$ se:

$$2^{-n-1} < |\omega \cdot \nu_{\lambda_v}| \leq 2^{-n+1}. \quad (20)$$

Se $n = -1$, $g^{(-1)}(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}) \neq 0$ se:

$$|\omega \cdot \nu_{\lambda_v}| > 1. \quad (21)$$

Per tenere nota della decomposizione, aggiungiamo all'albero \mathcal{A} una nuova etichetta: la *scala*, n_{λ_v} , è attaccata ad ogni ramo λ_v e indica la scala del propagatore corrispondente.

Definizione 4 (Cluster). Un insieme connesso massimale T costituito da vertici e rami che li collegano su scala $\leq n_T$, e tali che almeno uno di essi abbia scala n_T , è detto *cluster* su scala n_T .

Si stabilisce quindi un'inclusione tra cluster, in base alla quale all'interno ci sono quelli con etichetta di scala minore. In accordo con la struttura dell'albero, in un cluster possono entrare tanti rami, ma può uscirne uno soltanto.

Prendendo in considerazione la nuova etichetta aggiunta ai rami, il valore dell'albero (14) può essere così modificato:

$$Val(\vartheta) = \prod_{v \in V(\vartheta)} \frac{O_v}{m_v!} g^{(n_{\lambda_v})}(\omega \cdot \nu_{\lambda_v}). \quad (22)$$

Definizione 5 (Risonanza). Una *risonanza*, \mathcal{V} , è un cluster in cui entra solo una linea che ha lo stesso momento del ramo uscente. Inoltre il momento della linea entrante deve essere diverso dal momento di ogni altra linea all'interno della risonanza stessa.

Diremo che λ è una linea risonante se λ è il ramo che esce da una risonanza.

Data una risonanza \mathcal{V} , indicheremo con

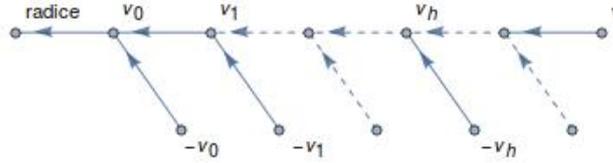
- $V(\mathcal{V})$ e $L(\mathcal{V})$ rispettivamente l'insieme dei vertici e dei lati in una risonanza;
- $\lambda_{\mathcal{V}}$ la linea entrante;
- $d(\mathcal{V})$ il *grado* della risonanza, i.e. numero di vertici contenuti in \mathcal{V} ;
- $k(\mathcal{V})$ l'*ordine* della risonanza, i.e. $k(\mathcal{V}) = \sum_{w \in V(\mathcal{V})} \delta_w$;
- $n_{\lambda_{\mathcal{V}}}$ la scala di risonanza, che è la scala che ha \mathcal{V} come cluster.

Osservazione 6. Per la relazione d'inclusione tra cluster, notiamo che la linea entrante nella risonanza ha scala più alta rispetto a quella dei rami interni alla risonanza stessa. Quindi, se consideriamo la risonanza come un cluster di scala n_T , otteniamo che $n_{\lambda_{\mathcal{V}}} \geq n_T + 1$, [3].

Osservazione 7. Dalla definizione di risonanza segue che:

$$\sum_{v \in V(\mathcal{V})} \nu_v = 0. \quad (23)$$

Osservazione 8. Il concetto di risonanza è molto importante in quanto i cluster risonanti potrebbero incidere “negativamente” sulla convergenza. Facciamo vedere con un esempio che un albero di ordine k in cui sono presenti delle risonanze potrebbe avere una “cattiva” dipendenza da k , ovvero $Val(\vartheta)$ potrebbe comportarsi come un fattoriale in k .



In figura è rappresentato un albero di ordine $k = 2p + 1$, dove p è il numero di risonanze. Supponiamo per semplicità che i rami con momento ν siano tutti del tipo $h \leftarrow h$, quindi il propagatore è della forma $(i\omega \cdot \nu)^{-2}$. Tenendo conto del contributo dei fattori dovuti agli altri nodi di modo ν_i attraverso una costante C , possiamo osservare

$$\begin{aligned} Val(\vartheta) &\sim C^k \frac{1}{(i\omega \cdot \nu)^{2(p+1)}} e^{-\xi|\nu|} \\ &\leq (C')^k |\nu|^{(k+1)\tau} e^{-\xi|\nu|} \\ &= (C')^k \frac{(\frac{\xi}{2})^{(k+1)\tau} |\nu|^{(k+1)\tau} [(k+1)\tau]!}{[(k+1)\tau]! (\frac{\xi}{2})^{(k+1)\tau}} e^{-\xi|\nu|} \\ &\leq (C'')^k (\frac{2}{\xi})^{(k+1)\tau} [(k+1)\tau]! e^{\frac{\xi}{2}|\nu|} e^{-\xi|\nu|} \\ &= (C'')^k (\frac{2}{\xi})^{(k+1)\tau} [(k+1)\tau]! e^{-\frac{\xi}{2}|\nu|} \end{aligned}$$

che per k grande rappresenta un problema in termini di convergenza.

Osservazione 9. Si riesce a dimostrare che se in uno sviluppo non ci sono termini risonanti, allora $X_\nu^{(k)}$, e quindi le serie di Lindstedt, convergono, [16] par. 5. Nel

corso di questa dimostrazione viene utilizzato un importante risultato dovuto a Siegel-Bryuno che ci permette di stimare il numero di linee non risonanti e il numero dei cluster presenti in un albero.²

La difficoltà principale per arrivare alla convergenza delle serie di Lindstedt è perciò riuscire a gestire le risonanze. Utilizziamo a tal fine la seguente costruzione, [16, 17]. Siano \mathcal{V} una risonanza e $\lambda_{\mathcal{V}}$ la linea entrante. Indichiamo con w_0 il vertice da cui la linea uscente alla risonanza viene fuori e con w_1 il vertice da cui esce $\lambda_{\mathcal{V}} = \lambda_{w_1}$. Quindi w_0 è dentro la risonanza, mentre w_1 è fuori; denotiamo con w'_1 il vertice successivo di w_1 dentro la risonanza, i.e. $w'_1 > w_1$ e $w'_1 \in V(\mathcal{V})$, perciò la linea entrante $\lambda_{\mathcal{V}}$ è il ramo che congiunge i due vertici, $w'_1 \leftarrow w_1$.

Chiamiamo \mathcal{V}_0 l'insieme dei rami e dei vertici in \mathcal{V} esterni alla massima risonanza contenuta in \mathcal{V} .

Definiamo il *fattore di risonanza*, $\mathcal{V}^{\mathcal{V}}(\omega \cdot \nu_{\lambda_{\mathcal{V}}})$, come:

$$\mathcal{V}^{\mathcal{V}}(\omega \cdot \nu_{\lambda_{\mathcal{V}}}) := \prod_{w \in V(\mathcal{V})} \frac{O_w}{m_w!} \prod_{\lambda \in L(\mathcal{V})} g^{(n_{\lambda})}(\omega \cdot \nu_{\lambda}). \quad (24)$$

Osservazione 10. Come possiamo osservare tale fattore dipende dalla risonanza \mathcal{V} ed in particolare dalle etichette $\zeta_{w_0}^2, \zeta_{w_1}^1$ che possono assumere i valori H, h e dai $d(\mathcal{V})$ vertici e $d(\mathcal{V}) - 1$ rami dentro \mathcal{V} . Diremo inoltre che una risonanza è di tipo

- hh se $\zeta_{w_0}^2 = \zeta_{w_1}^1 = h$;
- Hh se $\zeta_{w_0}^2 = H$ e $\zeta_{w_1}^1 = h$;
- hH se $\zeta_{w_0}^2 = h$ e $\zeta_{w_1}^1 = H$;

²Lemma di Siegel-Bryuno:

Dato un albero ϑ , definendo $\Delta(\vartheta) := \{v \in V(\vartheta) | \delta_v = 1 \text{ e } \nu_v \neq 0\}$ e $M(\vartheta) := \sum_{v \in \Delta(\vartheta)} |\nu_v|$, se $N_n^*(\vartheta) \neq 0$:

$$N_n^*(\vartheta) \leq 2M(\vartheta)2^{\frac{2-n}{\tau}} - 1;$$

$$p_n(\vartheta) \leq 2M(\vartheta)2^{\frac{2-n}{\tau}} - 1;$$

dove $N_n^*(\vartheta)$ è il numero di linee non risonanti di scala n e $p_n(\vartheta)$ è il numero di cluster aventi scala n .

- HH se $\zeta_{w_0}^2 = \zeta_{w_1}^1 = H$.

Sviluppando in serie di Taylor $\mathcal{V}^{\mathcal{V}}$ attorno a $\nu = 0$, otteniamo:

$$\mathcal{V}^{\mathcal{V}} = \mathcal{L}\mathcal{V}^{\mathcal{V}} + (1 - \mathcal{L})\mathcal{V}^{\mathcal{V}} \quad (25)$$

dove \mathcal{L} è detto *operatore di localizzazione* ed è definito nel modo seguente:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathcal{V}^{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^{\mathcal{V}}(0) + (\omega \cdot \nu)\dot{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(0) & \text{se } \mathcal{V} \text{ è una risonanza } hh, \\ \mathcal{L}\mathcal{V}^{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^{\mathcal{V}}(0) & \text{se } \mathcal{V} \text{ è una risonanza } Hh, \\ \mathcal{L}\mathcal{V}^{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^{\mathcal{V}}(0) & \text{se } \mathcal{V} \text{ è una risonanza } hH, \\ \mathcal{L}\mathcal{V}^{\mathcal{V}} = 0 & \text{se } \mathcal{V} \text{ è una risonanza } HH. \end{cases} \quad (26)$$

dove $\dot{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(0)$ denota la derivata di $\mathcal{V}^{\mathcal{V}}$ rispetto a $\omega \cdot \nu$ calcolata a $\nu = 0$.

Per capire meglio cosa vuol dire calcolare $\mathcal{V}(0)$, scomponiamo il momento di ogni linea λ dentro \mathcal{V} nel modo seguente:

$$\nu_\lambda = \nu_\lambda^0 + \varepsilon_\lambda \nu \quad (27)$$

dove con ν_λ^0 indichiamo la somma di tutte le etichette di modo dei vertici che precedono λ dentro la risonanza, mentre ε_λ ha la seguente caratteristica: vale 1 se λ appartiene al cammino (unico) tra w'_1 e w_0 , i.e. $\lambda \in \mathcal{P}(w'_1, w_0)$, vale 0 in caso contrario. Quindi calcolare attorno a $\omega \cdot \nu = 0$ vuol dire che $\nu_\lambda = \nu_\lambda^0 \quad \forall \lambda \in L(\mathcal{V})$.

Osservazione 11. La (25) può essere riformulata introducendo un altro operatore che indicheremo con \mathcal{R} , che rappresenta il resto di Taylor; quindi la (25) diventa:

$$\mathcal{V}^{\mathcal{V}} = \mathcal{L}\mathcal{V}^{\mathcal{V}} + \mathcal{R}\mathcal{V}^{\mathcal{V}}.$$

La comodità dello scomporre il fattore risonante in questo modo risiede nel fatto che la somma dei contributi dovuti a $\mathcal{L}\mathcal{V}$ si “cancellano”, attraverso la particolare costruzione di una *famiglia di risonanze*, mentre quelli dovuti a $\mathcal{R}\mathcal{V}$ si riescono a stimare. In questo modo riusciremo a controllare i termini risonanti, provando quindi la convergenza delle serie di Lindstedt e di conseguenza il teorema KAM, [16, 17].

Riusciremo infine a provare gli stessi risultati anche in un sistema hamiltoniano con forzante quasi periodica avente l'hamiltoniana della forma

$$\mathcal{H}(\alpha, A, \beta, B) = \mathcal{H}_0(A) + \varepsilon f(\alpha, A, \beta) + B \cdot \Omega \quad (28)$$

con $(\alpha, A) \in \mathbb{T}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ e $(\beta, B) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$, che verifica le seguenti condizioni, [20, 26]:

1. $\mathcal{H}_0(A)$, $f(\alpha, A, \beta)$ analitiche in A in un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\ell$;
2. $f(\alpha, A, \beta)$ analitica in $\alpha \in \Sigma_\xi := \{\alpha : \mathbf{Re}(\alpha) \in \mathbb{T}^\ell \text{ e } |\mathbf{Im}(\alpha)| \leq \xi\}$ e in $\beta \in \Sigma_{\xi'} := \{\beta : \mathbf{Re}(\beta) \in \mathbb{T}^d \text{ e } |\mathbf{Im}(\beta)| \leq \xi'\}$;
3. $\mathcal{H}_0(A)$, con $A \in \mathcal{D}$, soddisfa la condizione di anisocronia;
4. Ω soddisfa la condizione diofantea

$$|\Omega \cdot \bar{\nu}| \geq \frac{\gamma}{|\bar{\nu}|^{\tau_0}} \quad \forall \bar{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \quad (29)$$

con γ, τ_0 positivi e fissato Ω , il vettore (ω, Ω) soddisfa la condizione diofantea

$$|\omega \cdot \nu + \Omega \cdot \bar{\nu}| \geq \frac{1}{C_0 |\tilde{\nu}|^\tau} \quad \forall \tilde{\nu} \in \mathbb{Z}^{\ell+d} \setminus \{0\} \quad (30)$$

dove $\tilde{\nu} = (\nu, \bar{\nu})$ e C_0, τ sono positivi.

Riferimenti bibliografici

- [1] V. I. Arnol'd, "Small divisors problems in classical and celestial mechanics", *Uspekhi Mat. Nauk* 18 (1963), no. 6, 91-192; English translation in *Russ. Math. Surveys* 18 (1963), no. 6, pp. 85-191.
- [2] V. I. Arnol'd, "Small divisors II. Proof of a A.N.Kolmogorov's theorem on conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the hamiltonian", *Uspekhi Mat. Nauk* 18 (1963), no.5, 13-40; English translation in *Russ. Math. Surveys* 18 (1963), no. 5, pp. 9-36.
- [3] A. Berretti, G. Gentile, "Bryuno function and the standard map", *Commun. Math. Phys.* 220 (2001), pp. 623-656.
- [4] A. D. Bryuno, "The analytic form of differential equations I", *Trans. Moscow Math. Soc.* 25 (1971), pp. 131-288; II, *Trans. Moscow Math. Soc.* 26 (1972), pp. 199-239.
- [5] L. H. Eliasson, "Absolutely convergent series expansions for quasi-periodic motions", Report pp. 2-88, Department of Math., Univ. of Stockholm (1988); published in *Math. Phys. Electron. J.* 2 (1996), Paper 4, 33 pp. (electronic).
- [6] L. H. Eliasson, "Hamiltonian system with linear normal form near an invariant torus", *Nonlinear Dynamics*, ed. G. Turchetti, Bologna Conference, 30/5 to 3/6 1988, World Scientific, Teaneck, NJ, 1989.
- [7] L. H. Eliasson, "Generalization of an estimate of small divisors by Siegel", *Analysis, et cetera*, ed. E. Zehnder and P. Rabinowitz, book in honor of J. Moser, Academic Press, Boston, 1990.
- [8] J. Ford, "The Fermi-Pasta-Ulam problem: paradox turns discovery", *Phys. Rep.* 213 (1992), no. 5, pp.271-310.
- [9] G. Gallavotti, "Perturbation theory", *Mathematical Physics towards the XXI Century*, ed. R. Sen and A. Gersten, Ben Gurion University Press, Ber Sheva, 1994, pp. 275-294.

- [10] G. Gallavotti, “Quasi-integrable mechanical systems”, in *Phénomènes critiques, systèmes aléatoires, théories de jauge*, ed. K. Osterwalder and R. Stora, Lectures at the XLIII summer school in Les Houches, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984, pp. 541-624.
- [11] G. Gallavotti (ed.), “The Fermi-Pasta-Ulam problem. A status report”, Springer, Berlin, 2008.
- [12] G. Gallavotti, “Stabilità dell’integrabilità dell’hamiltoniana: teorema KAM e serie di Lindstedt”, estratto da T. Levi Civita e U. Amaldi, *Complementi alle Lezioni di Meccanica Razionale*, ed. CompoMat, 2012, pp. 373-402.
- [13] G. Gallavotti, “Twistless KAM tori, quasi flat homoclinic intersections, and other cancellations in the perturbation series of certain completely integrable hamiltonian system. A review”, *Rev. Math. Phys.* 6 (1994), no. 3, pp. 343-411.
- [14] G. Gentile, “Introduzione ai sistemi dinamici. Formalismo lagrangiano e hamiltoniano”, disponibile sul sito <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2008-2009/testo/testo.html>.
- [15] G. Gentile, “Invariant curves for exact symplectic twist maps of the cylinder with Bryuno rotation numbers”, *Nonlinearity* 28 (2015), pp. 2555-2585.
- [16] G. Gentile, V. Mastropietro, “Methods for the analysis of the Lindstedt series for KAM tori and renormalizability in classical mechanics”, *Rev. Math. Phys.* 8 (1996), no. 3, pp. 393-444.
- [17] G. Gentile, “Quasiperiodic motions in dynamical systems: Review of a renormalization group approach”, *J. Math. Phys.* 51, 015207 (2010), pp. 1-32.
- [18] A. N. Kolmogorov, “On the preservation of conditionally periodic motions”, *Dokl. Akad. Nauk* 96 (1954) pp. 527-530; English translation in G. Casati and J. Ford, *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian*, Lectures Notes in Phys. 93, Springer, 1979.

- [19] A. Lindstedt, *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* (1882), cited in H. Poincaré: *Les méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol. II, Gauthier-Villars, 1893, *partim*.
- [20] P. Lochak, "Tores invariants à torsion évanescence dans les systèmes hamiltoniens proches de l'intégrable", *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* 327 (1998), pp. 833-836.
- [21] J. Moser, "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 1962 (1962), pp. 1-20.
- [22] J. Moser, "Convergent series expansions for quasi-periodic motions", *Math. Ann.* 169 (1967), pp. 136-176.
- [23] J. Moser, "On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations", *Proc. Int. Conf. of Functional Analysis and Related Topics*, Tokyo 1969, pp. 60-67.
- [24] H. Poincaré, "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", Gauthier-Villars, Paris, Vol. I (1892), Vol. II (1893), Vol. III (1899).
- [25] E. Sernesi, "Geometria 2, Boringhieri, Torino, 1994.
- [26] M. B. Sevryuk, "Invariant tori in quasi-periodic non autonomous dynamical system via Herman's method", *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 18 (2007), no. 2-3, pp. 569-595.
- [27] C. L. Siegel, "Iterations of analytic functions", *Ann. Math.* 43 (1943), no. 4, pp. 607-612.
- [28] C. L. Siegel, J. Moser "Lectures on Celestial Mechanics", Springer, New York, 1971.