Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 1
01/10/2018

1. Stabilire quali delle seguenti applicazioni $f\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ siano forme bilineari:

   (a) $f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 + \sum_{i=2}^{4} x_i y_{i-1} + y_4$, dove (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) sono le coordinate, rispettivamente, di $\overline{x}$ e $\overline{y}$ rispetto a una base fissata (questa convenzione vale anche per le funzioni successive).

   (b) $f(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4)$

   (c) $f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_2 + 4x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_4 - 4x_3y_1 - x_3y_4 - 3x_4y_2 + x_4y_3$

   (d) $f(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{4} |x_i| y_i$

   (e) $f(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - y_i)^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{4} y_i^2$

   (f) $f(\overline{x}, \overline{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - 2x_4y_1 - 3x_2y_2 - \frac{1}{3}x_3y_3 + x_3y_4$

   (g) $f(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{5}(-x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_1y_4 + x_2y_1 + x_2y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_4 + 2x_4y_1 + x_4y_2 + x_4y_3)$

2. Si scriva la matrice associata e si determini il rango di ogni forma bilineare individuata nel precedente esercizio. Si determini anche quali siano simmetriche e quali antisimmetriche.

3. Si stabilisca quali delle seguenti forme bilineari su $\mathbb{R}^2$ coincidano tra loro:

   (a) $b(\overline{v}, \overline{w}) = \frac{3}{4}e_1f_1 - \frac{5}{4}e_1f_2 + \frac{3}{4}e_2f_1 + \frac{3}{4}e_2f_2$ con le coordinate rispetto alla base canonica $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$;

   (b) $b(\overline{v}, \overline{w}) = \frac{2}{3}s_1t_1 - s_1t_2 - s_2t_1 + \frac{3}{2}s_2t_2$ con le coordinate rispetto alla base $\left\{\binom{2}{0}, \binom{1}{1}\right\}$;

   (c) $b(\overline{v}, \overline{w}) = a_1b_2 - a_2b_1$ con le coordinate rispetto alla base $\left\{\binom{1}{3}, \binom{5}{0}\right\}$;

   (d) $b(\overline{v}, \overline{w}) = \frac{25}{6}c_1d_1 + \frac{5}{12}c_1d_2 + \frac{5}{12}c_2d_1 + \frac{1}{24}c_2d_2$ con le coordinate rispetto alla base $\left\{\binom{0}{1}, \binom{2}{1}\right\}$;

   (e) $b(\overline{v}, \overline{w}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$ con le coordinate rispetto alla base $\left\{\binom{1}{1}, \binom{1}{-1}\right\}$.

4. Si scrivano la forma bilineare polare e la matrice associata alle seguenti forme quadratiche $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Inoltre se ne determini il rango.

   (a) $q((x_1, x_2)) = 5x_1^2 - 7x_1x_2 + 3x_2^2$

   (b) $q((x_1, x_2)) = 9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$

   (c) $q((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2$

5. Si scrivano la forma bilineare polare e la matrice associata alle seguenti forme quadratiche $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Inoltre se ne determini il rango.

   (a) $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$

(b) $q((x_1,x_2,x_3)) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_1x_3 - 2x_2^2 + 3x_2x_3 - x_3^2$

(c) $q((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

(d) $q((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 12x_2x_3 + 9x_3^2$

6. Si consideri la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base standard.

   (a) Sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini $v^\perp$.

   (b) Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato da $\overline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\overline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si determini $V^\perp$.

7. Si dimostri che ogni forma bilineare su un campo di caratteristica diversa da 2 si può esprimere come somma di una forma bilineare simmetrica e di una antisimmetrica.

8. **(Non c'è stato il tempo di farlo in classe, potete provarlo a farlo a casa e ne possiamo parlare all'inizio della prossima esercitazione).** Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate due per due a entrate in $\mathbb{R}$ e si consideri l'applicazione $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definita come $f(A,B) = tr({}^tAMB)$, con M una matrice fissata in V.

   (a) Si dimostri che f è una forma bilineare.

   (b) Si determini la matrice di f rispetto alla base canonica di V (ovvero $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$).

   (c) Si stabilisca per quali M è non degenere, per quali è simmetrica e per quali antisimmetrica.

   (d) Se invece $V = M_n(\mathbb{R})$ con n intero positivo qualunque, si definisca analogamente f e si dica per quali matrici f è simmetrica e per quali è antisimmetrica. (Suggerimento: usando le proprietà della traccia ci si riduca a mostrare per quali matrici f è la forma nulla).