Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 11
17/12/2018

Gli esercizi segnati con un asterisco non sono stati svolti in classe.

1. Determinare chiusura proiettiva e punti impropri delle seguenti curve di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:
   (a) $X^2 - 2Y - 3 = 0$.
   ($3X_0^2 - 2X_0X_2 - X_1^2 = 0$, $[0,0,1]$)
   (b) $X^2Y + 3X = 0$.
   ($3X_0X_1 + X_1^2X_2 = 0$, $[0,0,1]$ e $[0,1,0]$)
   (c) $X^2 + Y^2 + 1 = 0$.
   ($X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$, $[0,1,i]$ e $[0,1,-i,]$)
   (d) $X^2Y - XY^2 + Y^2 - X = 0$.
   ($X_0^2X_1 - X_0X_2^2 + X_1X_2^2 - X_1^2X_2 = 0$, $[0,0,1]$, $[0,1,0]$ e $[0,1,1]$)
   (e) $X^2Y^2 - 3 = 0$.
   ($3X_0^4 - X_1^2X_2^2 = 0$, $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$)

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare chiusura proiettiva e punti impropri della conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazione $X^2 - kXY + Y^2 + kX - (k+1)Y + 5 = 0$
   ($5X_0^2 + kX_0X_1 - (k+1)X_0X_2 + X_1^2 - kX_1X_2 + X_2^2 = 0$;
   per $|k|>2$ $[0,2,k+\sqrt{k^2-4}]$ e $[0,2,k-\sqrt{k^2-4}]$, per $k=2$ $[0,1,1]$,
   per $k=-2$ $[0,1,-1]$, per $-2<k<2$ non ha punti impropri)

3. Stabilire se le seguenti curve di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ abbiano dei centri di simmetria e nel caso determinarli.
   (a) $X^2 - Y = 0$
   (Non ha centri di simmetria)
   (b) $X^2 - Y^2 = 0$
   ($(0,0)$)
   (c) $X^3 + 3XY^2 - 3X^2Y - Y^3 = 0$
   (Ogni punto della retta $X - Y = 0$)
   (d) $*$ $X^2 - Y^2 + 1 = 0$
   ($(0,0)$)
   (e) $*$ $X + XY + Y^2 - 1 = 0$
   ($(2,-1)$)

4. $*$ Dimostrare che tutti e soli i centri di simmetria di una conica affine di equazione $a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + 2a_{01}X + 2a_{02}Y + a_{00} = 0$ sono i punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema $a_{11}X + a_{12}Y + a_{01} = a_{12}X + a_{22}Y + a_{02} = 0$. In particolare ogni conica a centro ha un unico centro di simmetria e ogni parabola non degenere non ha centri di simmetria.

5. Stabilire quali delle seguenti curve di $\mathbb{E}^2$ siano simmetriche rispetto a uno degli assi coordinati e, in caso affermativo, rispetto a quale.
   (a) $X^2 + YX^4 + Y^2X^6 + 2 = 0$
   (Simmetrica rispetto all'asse $X = 0$)
   (b) $X^3 + Y^2X - Y^4X^5 + 3X = 0$
   (Simmetrica rispetto a entrambi gli assi coordinati)
   (c) $Y^2X - 1 = 0$

(Simmetrica rispetto all'asse $Y = 0$)

(d) $XY - 1 = 0$

(Non è simmetrica rispetto ad alcuno degli assi coordinati)

6. Classificare le seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ determinandone rango e forma canonica con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (a) $X_0^2 + 4X_0X_1 - 2X_0X_2 + X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$
   (Rango 3, forma canonica su $\mathbb{C}$:$X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$, su $\mathbb{R}$:$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$)

   (b) $2X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_1^2 + 2X_1X_2 + 3X_2^2 = 0$
   (Rango 3, forma canonica su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$)

   (c) $*$ $X_0^2 + 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 5X_1^2 + 6X_1X_2 + 2X_2^2 = 0$
   (Rango 2, forma canonica su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$: $X_0^2 + X_1^2 = 0$)

   (d) $*$ $2X_0^2 + 5X_0X_1 + 3X_0X_2 - 3X_1^2 - 3X_1X_2 - 2X_2^2 = 0$
   (Rango 2, forma canonica su $\mathbb{C}$: $X_0^2 + X_1^2 = 0$, su $\mathbb{R}$: $X_0^2 - X_1^2 = 0$)

7. $*$ Per ognuna delle coniche $\mathscr{C}$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dell'esercizio precedente determinare una proiettività T tale che $T(\mathscr{C})$ abbia forma canonica.
   (Per (a) $T([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 + 2x_1 - x_2, \sqrt{3}x_2, \sqrt{3}x_1 - \sqrt{3}x_2]$;
   per (b) $T([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 - x_1, \sqrt{3}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2, \frac{\sqrt{30}}{3}x_2]$;
   per (c) $T([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 + 2x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_2]$;
   per (d) $T([x_0, x_1, x_2]) = [2x_0 - \frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2, \frac{7}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2, \sqrt{2}x_2]$)