Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 12
20/12/2018

Gli esercizi segnati con un asterisco non sono stati svolti in classe.

1. Classificare le seguenti coniche $\mathscr{C}$ di $\mathbb{E}^2$ determinandone il tipo e la forma canonica. Determinare anche un'isometria T tale che $T(\mathscr{C})$ abbia forma canonica.

   (a) $X^2 + Y^2 + XY - X - Y - 1 = 0$
   (Ellisse, $\frac{3}{8}X^2 + \frac{9}{8}Y^2 = 1$, $T(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{3})$)

   (b) $*$ $3X^2 - 8XY + 3Y^2 - 4X + 3Y + \frac{1}{2} = 0$
   (Iperbole, $28X^2 - 4Y^2 = 1$,
   $T(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{4})$)

   (c) $X^2 + 9Y^2 + 6XY - 2X + 2Y = 0$
   (Parabola, $Y^2 - \frac{2\sqrt{10}}{25}X = 0$,
   $T(x,y) = (\frac{3\sqrt{10}}{10}x - \frac{\sqrt{10}}{10}y + \frac{\sqrt{10}}{200}, \frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y + \frac{\sqrt{10}}{50})$

2. $*$ Trovare il tipo e la forma canonica della conica euclidea $\mathscr{C}_k$ di equazione $(k-1)X^2 + (k-4)Y^2 + 4XY + 2kX + 2kY + 4 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   ($k = 0$: parabola degenere $Y^2 - \frac{4}{5} = 0$; $k = 5$: parabola $Y^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}X = 0$;
   $k < 0$: ellisse $\frac{k^2-5k}{2k^2-13k+20}X^2 + \frac{(5-k)^2}{2k^2-13k+20}Y^2 = 1$;
   $k > 5$: ellisse $\frac{(k-5)^2}{2k^2-13k+20}X^2 + \frac{k^2-5k}{2k^2-13k+20}Y^2 = 1$;
   $\frac{5}{2} < k < 4$: iperbole $\frac{k^2-5k}{2k^2-13k+20}X^2 - \frac{(k-5)^2}{2k^2-13k+20}Y^2 = 1$;
   $0 < k < \frac{5}{2}$ e $4 < k < 5$: iperbole $\frac{(5-k)^2}{2k^2-13k+20}X^2 - \frac{5k-k^2}{2k^2-13k+20}Y^2 = 1$;
   $k = 4$: iperbole degenere $X^2 - 4Y^2 = 0$; $k = \frac{5}{2}$: iperbole degenere $X^2 - Y^2 = 0$)

3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare il tipo e la forma canonica della conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di equazione $3X^2 + 2kXY + 2Y^2 - 2kY + k = 0$
   ($k = 0, \frac{-3\pm\sqrt{57}}{2}$: conica a centro degenere $X^2 + Y^2 = 0$;
   $k = \pm\sqrt{6}$: parabola $Y^2 - X = 0$;
   $k \notin \{0, \frac{-3\pm\sqrt{57}}{2}, \pm\sqrt{6}\}$: conica a centro $X^2 + Y^2 = 1$)