Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 2
08/10/2018

L'asterisco denota gli esercizi che non sono stati svolti in classe. Dopo ogni esercizio non teorico è indicata tra parentesi la soluzione, che, però, non è sempre l'unica possibile.

1. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base rispetto alla quale la forma quadratica assegnata su $\mathbb{R}^3$ (espressa in coordinate rispetto alla base canonica) assuma la forma canonica. Calcolare anche la segnatura.
   (a) $q((x_1,x_2,x_3)) = -\frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$
   (base: $\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,1), \sqrt{2}(1,0,0), \sqrt{2}(0,1,0)\}$, segnatura: $(1,2)$);
   (b) $q((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2 - x_1x_3 + \frac{1}{5}x_2^2 + \frac{2}{5}x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2$
   (base: $\{(1,0,0),(2,5,0),(\frac{1}{2},0,1)\}$, segnatura: $(2,0)$);
   (c) $q((x_1,x_2,x_3)) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$
   (base: $\{\frac{\sqrt{5}}{5}(1,0,0),(1,0,1),\sqrt{5}(\frac{2}{5},1,0)\}$, segnatura: $(3,0)$);
   (d) $*\ q((x_1,x_2,x_3)) = \frac{1}{4}(-x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2)$
   (base: $\{(2,0,0),(1,1,0),(-1,0,1)\}$, segnatura: $(0,1)$).

2. $*$ In ciascuno dei seguenti casi determinare una base rispetto alla quale la forma quadratica assegnata su $\mathbb{C}^4$ (rispetto alla base canonica) assuma la forma canonica e determinarne il rango.
   (a) $q((z_1,z_2,z_3,z_4)) = -z_1^2 + z_1z_3 + 2z_1z_4 + z_2^2 - 2z_2z_3 + 2z_3^2 - z_3z_4 - 2z_4^2$
   (base: $\{(i,0,0,0),(0,1,0,0),\frac{\sqrt{5}}{5}(1,2,2,0),(i,0,0,i)\}$, rango 4);
   (b) $q((z_1,z_2,z_3,z_4)) = -z_1^2 + 4z_1z_2 + 2z_1z_3 + 8z_1z_4 - 2z_2z_3 + 2z_2z_4 + 3z_3^2 + 4z_3z_4 + 8z_4^2$
   (base: $\{(i,0,0,0),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0),\frac{\sqrt{15}}{15}(4,3,0,-1),(1,2,1,-1)\}$, rango 3).

3. Senza diagonalizzarle, dire quali delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^4$ sono definite positive o definite negative. Come sempre le coordinate sono rispetto alla base canonica.
   (a) $q((x_1,x_2,x_3,x_4)) = 2x_1^2 + 6x_1x_3 + 12x_1x_4 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 14x_2x_4 + 3x_3^2 + 2x_3x_4 + 5x_4^2$ (né definita positiva né definita negativa);
   (b) $q((x_1,x_2,x_3,x_4)) = 3x_1^2 + 8x_1x_3 + 6x_1x_4 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 8x_3^2 + 22x_4^2$ (definita positiva);
   (c) $*\ q((x_1,x_2,x_3,x_4)) = -5x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2 + 14x_2x_3 - 60x_3^2 + 4x_3x_4 - x_4^2$ (né definita positiva né definita negativa);
   (d) $*\ q((x_1,x_2,x_3,x_4)) = -4x_1^2 + 10x_1x_3 - 7x_2^2 + 6x_2x_3 + 8x_3^2 + 7x_4^2$ (definita negativa);
   (e) $*\ q((x_1,x_2,x_3,x_4)) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_2x_4 + 4x_3^2 + 10x_3x_4 + 6x_4^2$ (definita positiva).

4. Ortogonalizzare la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto a ciascun prodotto scalare associato ad una forma quadratica definita positiva individuata nell'esercizio precedente.
(rispetto a (b): $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(-\frac{4}{3},-\frac{3}{5},1,0),(-\frac{93}{13},-\frac{36}{13},\frac{60}{13},1)\}$;
rispetto a (e): $\{(1,0,0,0),(-\frac{3}{2},1,0,0),(2,-\frac{4}{3},1,0),(\frac{3}{2},-1,-\frac{3}{4},1)\}$)

5. Ortonormalizzare rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^4$ i seguenti insiemi di vettori e completarli a una base ortonormale.

   (a) $\{(1,2,0,0),\ (5,0,1,0),\ (3,1,2,0)\}$
   ($\{\frac{\sqrt{5}}{5}(1,2,0,0), \frac{\sqrt{21}}{21}(4,-2,1,0), \frac{\sqrt{105}}{105}(-2,1,10,0), (0,0,0,1)\}$);

   (b) $\{(1,0,1,0),\ (0,1,1,1),\ (1,-1,0,-1)\}$
   ($\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0), \frac{\sqrt{10}}{10}(-1,2,1,2), \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,-1), \frac{\sqrt{10}}{10}(2,1,-2,1)\}$).

6. $*$ Dimostrare che una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è semidefinita positiva se e solo se esiste $M \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^tMM$.

7. $*$ Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2.

   (a) Sia $b : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ una forma blineare antisimmetrica non nulla. Per definizione per ogni base di $\mathbb{K}^2$ la matrice associata assume la forma
   $$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$
   per qualche $a \in \mathbb{K}$. Dimostrare che nel caso $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso o sia $\mathbb{R}$, esiste una base tale che $a = 1$.

   (b) Sia $b : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ una forma blineare antisimmetrica non nulla. Dimostrare che b è degenere e che esiste una base di $\mathbb{K}^3$ tale che la matrice associata assuma la forma
   $$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   per qualche $a \in \mathbb{K}$. Come nel punto precedente, se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso o è $\mathbb{R}$, allora esiste una base tale che $a = 1$.

   (c) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare antisimmetrica non nulla. Dimostrare che b ha rango pari $2r$ e che esistono un sottospazio W di dimensione $n - 2r$ e r sottospazi $V_1, \dots V_r$ di dimensione 2 tali che V si decomponga come somma ortogonale (ovvero tale che gli addendi siano a due a due ortogonali rispetto a b) di W, che è il più grande sottospazio di V dove la restrizione di b è nulla, e dei V_i. Ciò è equivalente all'esistenza di una base di V rispetto alla quale la matrice di b, $M = (m_{i,j})$, è ovunque nulla tranne nelle entrate $m_{2s,2s-1} = -m_{2s-1,2s} = a_s$ per qualche $a_s \in \mathbb{K}$ per ogni $s = 1, \dots, r$, o, riordinando la base, tranne nelle entrate $m_{2r+1-s,s} = -m_{s,2r+1-s} = a_s$. Come nei punti precedenti, se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso o è $\mathbb{R}$, allora esiste una base tale che $a_s = 1$, per ogni $s = 1, \dots, r$.