Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 4
22/10/2018

L'esercizio contrassegnato con un asterisco non è stato svolto a lezione.

1. Calcolare la distanza del punto P di coordinate $(2,3,-1)$ dal piano $\mathscr{p}$ di equazione $X-Y+2Z+5=0$ in $\mathbb{E}^3$.
   $(\frac{\sqrt{6}}{3})$

2. Sia $\mathscr{p}$ il piano di $\mathbb{E}^3$ di equazione cartesiana $X+2Y+Z+1=0$ e sia $\mathscr{r}_k$ la retta di equazioni parametriche $x=-2k+1+(k-1)t$, $y=k-1-kt$, $z=k+2kt$, al variare di $k\in\mathbb{R}$.
   (a) Si determinino i valori di k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{p}$ sono paralleli e se ne calcoli la distanza. $(k=1;\ d(\mathscr{r}_k,\mathscr{p})=\frac{\sqrt{6}}{6})$
   (b) Si determinino i valori di k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{p}$ sono incidenti e si determini l'angolo convesso formato. Dire se esistono valori di k per cui siano ortogonali.
   $(k\neq 1;\ \arcsin\left(\pm\frac{k-1}{\sqrt{6(6k^2-2k+1)}}\right)$; non esistono $k\in\mathbb{R}$ per cui siano ortogonali)

3. Sia $\mathscr{r}_k$ la retta di $\mathbb{E}^3$ di equazioni cartesiane $-X+kY-kZ-k^2+2k+1=Y+(k-1)Z-3k+2=0$ e sia $\mathscr{s}_k$ la retta di equazioni cartesiane $X+kY-kZ-k^2+k-1=3Y-(k+3)Z-2k+3=0$, entrambe al variare di $k\in\mathbb{R}$.
   (a) Si determinino i valori di k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}_k$ sono sghembe e se ne calcoli la distanza. $(k\neq 0,\ -1;\ d(\mathscr{r}_k,\mathscr{s}_k)=\frac{|k(k+1)|}{\sqrt{k^2(k+1)+k^2+4}})$
   (b) Si determinino i valori di k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}_k$ sono parallele e se ne calcoli la distanza. $(k=0;\ d(\mathscr{r}_0,\mathscr{s}_0)=\frac{\sqrt{2}}{2})$
   (c) Si determinino i valori di k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}_k$ sono incidenti e si calcolino il punto di intersezione e l'angolo convesso da esse formato.
   $(k=-1$; coordinate punto d'intersezione: $(\frac{1}{2},0,\frac{5}{2})$; $\arccos\left(\pm\frac{4\sqrt{21}}{21}\right))$

4. Determinare equazioni cartesiane della retta $\mathscr{s}$ di $\mathbb{E}^3$ passante per $P=(0,1,-1)$, incidente la retta $\mathscr{r}$ di equazioni $X+Y+Z+3=X+Y-2Z+2=0$ e ad essa ortogonale.
   $(X-Y+1=4Y+11Z+7=0)$

5. Determinare un'equazione cartesiana del piano $\mathscr{p}$ di $\mathbb{E}^3$ contente la retta $\mathscr{r}$ di equazioni $3X-2Y+2=4Y-Z=0$ e ortogonale al piano $\mathscr{q}$ di equazione $X+3Y-5Z=0$.
   $(51X-22Y-3Z+34=0)$

6. Determinare equazioni cartesiane della retta $\mathscr{r}$ di $\mathbb{E}^3$ passante per $P=(1,3,1)$ perpendicolare alla retta $\mathscr{s}$ di equazioni $X-3Y+1=X-3Z=0$ e incidente la retta $\mathscr{t}$ di equazioni $3X+Y-Z=X+Y+3Z-2=0$. Calcolare la distanza tra $\mathscr{r}$ e $\mathscr{s}$.
   $(3X+Y+Z-7=X-2Z+1=0;\ d(\mathscr{r},\mathscr{s})=\frac{53}{3\sqrt{394}})$

7. $*$ Verificare che le rette $\mathscr{r}$ di equazioni $X+Y+2Z+1=Y+Z+2=0$ e $\mathscr{s}$ di equazioni $X-Y+Z+1=Y+1=0$ sono sghembe in $\mathbb{E}^3$. Trovarne la perpendicolare comune e la distanza.
   $(Y+1=X-Z-3=0;\ d(\mathscr{r},\mathscr{s})=\frac{3\sqrt{2}}{2})$

8. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione dispari e sia $T:V\to V$ un operatore unitario. Dimostrare che esiste $\bar{v}\in V$ tale che $T(T(\bar{v}))=\bar{v}$.