Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 5 - Preparazione al primo esonero
29/10/2018

1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(\bar{v}) = 4x_1x_3 + 2x_2x_4$, dove (x_1, x_2, x_3, x_4) sono le coordinate di $\bar{v}$ rispetto alla base canonica.

   (a) Determinare la forma bilineare polare e la matrice associate a q.
   $(b(\bar{v}, \bar{w}) = 2x_1y_3 + x_2y_4 + 2x_3y_1 + x_4y_2)$

   (b) Determinare una base in cui q assuma la forma canonica, quindi determinare segnatura e tipo di q.
   $(\{\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3,\ \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_4,\ \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3,\ \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_4\}$; $(2, 2)$; indefinita)

2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si consideri la forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita come $b(\bar{v}, \bar{w}) = x_1y_1 + x_1y_4 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 + x_4y_3 + 2x_4y_4$, dove (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) sono le coordinate, rispettivamente, di $\bar{v}$ e $\bar{w}$ rispetto alla base canonica

   (a) Si dimostri, senza diagonalizzare, che b è un prodotto scalare su V.

   (b) Si ortonormalizzi la base canonica rispetto a b.
   $\{(1, 0, 0, 0),\ (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0),\ (0, -\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0),\ (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{3\sqrt{2}}{8}, 1)\}$

   (c) Si ortogonalizzi l'inisieme $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$ e lo si completi a una base ortogonale del sottospazio vettoriale W generato da e_1, e_2 ed e_3.
   $(\{(1, -1, 0, 0)\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0),\ (2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\})$

   (d) Si completi la base ortogonale di W determinata nel punto precedente a una base ortogonale di V.
   (Il quarto vettore è, ovviamente, $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{3\sqrt{2}}{8}, 1)$)

3. Si considerino in $\mathbb{E}^3$ le rette $\mathscr{s}$ di equazioni cartesiane $X + 2Y + Z - 1 = X - Z + 1 = 0$ e $\mathscr{t}$ di equazioni cartesiane $X + 2Y - Z + 1 = X + Z - 1 = 0$ e il piano $\mathscr{p}$ di equaziona cartesiana $3X + Y - Z + 1 = 0$.

   (a) Si verifichi che $\mathscr{s}$ e $\mathscr{t}$ sono incidenti e se ne calcoli punto di intersezione e angolo convesso formato. Si determini un'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.
   $((0, 0, 1);\ \arccos(\pm\frac{1}{3});\ X + Y = 0)$

   (b) Si verifichi che $\mathscr{s}$ e $\mathscr{t}$ sono entrambi incidenti a $\mathscr{p}$ e si calcoli l'angolo convesso e il punto di intersezione tra ciascuna di esse e il piano $\mathscr{p}$.
   ($\arcsin(\pm\frac{\sqrt{33}}{33})$; $\arcsin(\pm\frac{\sqrt{33}}{11})$; il punto comune è sempre $(0, 0, 1)$)

   (c) Si determinino equazioni cartesiane della retta simmetrica a $\mathscr{s}$ rispetto a $\mathscr{p}$ e della retta simmetrica a $\mathscr{t}$ rispetto a $\mathscr{p}$.
   $(13X + 5Y = 13X - 5Z + 5 = 0;\ 15X - Y = 7X - Z + 1 = 0)$

   (d) Si determinino equazioni cartesiane della retta $\mathscr{r}_k$ incidente a $\mathscr{s}$, ortogonale a $\mathscr{t}$ e passante per il punto P_k di coordinate $(1, k, k + 1)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
   $(2kX + (k - 1)Y - (k + 1)Z + k + 1 = X - Y - Z + 2k = 0)$

   (e) Si determini il punto di intersezione e l'angolo convesso tra $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. In particolare si determinino i valori di k per cui $\mathscr{r}_k$ e $\mathscr{s}$ sono ortogonali.
   $((1 - 2k, 2k - 1, 2 - 2k);\ \arccos(\pm\frac{6k-2}{\sqrt{42k^2-24k+6}}),\ k = \frac{1}{3})$

(f) Si determinino i valori di k per cui r_k e p sono paralleli (rispettivamente incidenti) e se ne determini la distanza (rispettivamente l'angolo convesso formato).

(paralleli: $k = -1$; $\frac{3\sqrt{11}}{11}$; incidenti: $k \neq -1$, $\arcsin(\pm\frac{2k+2}{\sqrt{154k^2-88k+22}})$)

(g) Si stabiliscano i valori di k per cui r_k e t sono sghembe e si determinino equazioni parametriche della perpendicolare comune e la distanza.

$$(k \neq -1,\ \tfrac{1}{2};\ \begin{cases} x = \frac{1-2k}{3} + \frac{8k^3-6k+2}{3(7k^2-4k+1)}t \\ y = \frac{2k-1}{3} + \frac{10k^3+3k^2-6k+1}{3(7k^2-4k+1)}t \\ z = \frac{2k+2}{3} + \frac{-2k^3-3k^2+1}{3(7k^2-4k+1)}t \end{cases} \quad ;\ \frac{|4k^2+2k-2|}{\sqrt{42k^2-24k+6}})$$