Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 6
12/11/2018

Gli esercizi contrassegnati con un asterisco non sono stati svolti a lezione.

1. In ciascuno dei seguenti casi verificare che esiste una sola isometria f di $\mathbb{E}^2$ che verifichi le proprietà richieste e determinarla.
   (a) $f((0,0)) = (1,2)$, $f((1,0)) = (2,2)$ e f è un'isometria diretta.
   $(f((x,y)) = (x+1, y+2))$
   (b) $f((0,0)) = (1,2)$, $f((1,0)) = (2,2)$ e f è un'isometria inversa.
   $(f((x,y)) = (x+1, -y+2))$

2. $*$ Si determini la matrice associata alla riflessione di $\mathbb{E}^2$ rispetto a una retta r in termini dell'angolo convesso formato da r e dall'asse delle ascisse (ovvero la retta di equazione $Y = 0$).

3. Si determini l'immagine delle rette di $\mathbb{E}^2$ r di equazione $X - Y - 1 = 0$ e s di equazione $2X + Y + 3 = 0$ tramite la rotazione di centro $(2,1)$ e angolo $\pi/4$.
   Si determini anche l'immagine di s tramite ogni glissoriflessione di asse r.
   $(R_{(2,1),\frac{\pi}{4}}(r): X = 2; R_{(2,1),\frac{\pi}{4}}(s): X+Y-3+2\sqrt{2} = 0; \rho_r \circ t_{(\lambda,\lambda)}(s): 3X-2Y-4-\lambda = 0)$

4. Per ognuna delle seguenti matrici, si determini una matrice $M \in \mathrm{SO}(2)$ che la diagonalizzi.
   (a) $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$
   $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
   (b) $* \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
   $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

5. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica assegnata. Si trovi anche la corrispondente forma diagonale.
   (a) $* \; q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$;
   $(\{(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})\}$;
   $q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2)$
   (b) $* \; q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 12x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$;
   $(\{(\frac{3\sqrt{35}}{35}, \frac{\sqrt{35}}{35}, -\frac{\sqrt{35}}{7}), (\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0), (\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7})\}$;
   $q(y_1, y_2, y_3) = -5y_1^2 + 5y_2^2 + 9y_3^2)$
   (c) $* \; q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2$;
   $(\{(0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}), (1,0,0), (0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})\}$; $q(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2)$
   (d) $q(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + 2x_1x_3 + kx_2^2 - 2x_2x_3 + kx_3^2$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$(\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0),\ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),\ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\};$
$q(y_1, y_2, y_3) = ky_1^2 + (k + \sqrt{2})y_2^2 + (k - \sqrt{2})y_3^2)$

6. $*$ Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi la forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$. Si trovi anche la corrispondente forma diagonale.

$(\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0),\ (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}),\ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ (\frac{\sqrt{12}}{12}, -\frac{\sqrt{12}}{12}, -\frac{\sqrt{12}}{4}, \frac{\sqrt{12}}{12})\};$
$q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2)$