Esercitazioni GE210
A.A. 2018/2019
Esercitazione 7
19/11/2018

Gli esercizi segnati con un asterisco non sono stati svolti in classe.

1. Stabilire quali delle seguenti sono forme hermitiane su $\mathbb{C}^3$:
   (a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 + ix_1\bar{y}_3 + ix_2\bar{y}_1 + ix_3\bar{y}_1 + x_3\bar{y}_3$;
   (b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + 2ix_2\bar{y}_3 - 2ix_3\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$;
   (c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + 3x_3\bar{y}_3$.

   ((b) e (c))

2. Stabilire quali delle seguenti matrici sono hermitiane:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-2i \\ 2+2i & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -6i \\ -6i & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 6 \end{pmatrix}$.

   (A e D)

   (b) $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -i \\ -1 & 2 & 1-i \\ i & i+1 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3i \\ -1 & 2 & 2i \\ -3i & -2i & i \end{pmatrix}$

   (E)

3. Per ognuna delle matrici hermitiane H in $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ identificate nell'esercizio precedente si trovi una matrice unitaria M tale che ${}^*MHM$ sia diagonale.

   Per A, $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}(1+i)}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}(1+i)}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$; per D, $M = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{i\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

4. $*$ Trovare una matrice unitaria M tale che ${}^*M \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} M$ sia diagonale.

   ($M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$)

5. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e sia H la matrice associata a una forma hermitiana h su V rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Si consideri s la forma bilineare simmetrica associata ad h. Si determini la matrice S di s rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_n\}$ in termini di H.

6. Determinare quali delle forme hermitiane identificate nell'esercizio 5 o associate rispetto alla base canonica alle matrici hermitiane identificate nell'esercizio 6 sono prodotti hermitiani. Ortonormalizzare la base canonica rispetto a ciascuno di essi.

   (La forma (c) dell'es. 5 e le forme associate alle matrici A e D dell'es. 6. Le ortonormalizzazioni sono, nell'ordine $\{e_1, \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \frac{\sqrt{3}}{3}e_3\}$, $\{\frac{\sqrt{3}}{3}e_1, \frac{\sqrt{69}}{23}(e_2 - \frac{2-2i}{3}e_1)\}$ e $\{\frac{\sqrt{3}}{3}e_1, \frac{\sqrt{10}}{10}(e_2 - \frac{2i}{3}e_1)\}$)

7. $*$ Si stabilisca per quali $m \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & m \end{pmatrix}$ è definita positiva.

$(m > 2)$

8. $*$ Si verifichi che l'insieme $\{(i, -i, 0, i),\ (0, i, i, i),\ (1, i, 0, i),\ (-i, 0, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbb{C}^4$ e lo si ortonormalizzi rispetto al prodotto hermitiano standard.

$(\{(\frac{\sqrt{3}}{3}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}i),\ (0, \frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i),\ (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}(1+i)}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}(-1+i)}{6}),$
$(-\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}(1-i)}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}(1+i)}{6})\})$